ZUR BEHANDLUNG DES KERNMATERIEPROBLEMS MIT PHÄNOMENOLOGISCHEN UND REALISTISCHEN NUKLEON-NUKLEON-WECHSELWIRKUNGEN IM RAHMEN DER GREENSCHEN FUNKTIONSMETHODE

FRIDOLIN WEBER

Diss
München
1965

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554630_0002

Zur Behandlung des Kernmaterieproblems mit phänomenologischen und realistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen im Rahmen der Greenschen Funktionsmethode

Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Fridolin Weber

aus

Uffing a. Staffelsee

München, den

10.04.1985

1. Gutachter: Prof. Dr. M. Weigel

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Bross

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 1985

Abstract

We performed a self-consistent calcualation of the nuclear matter properties within the Green's function scheme. Essentially is the self-energy $\Sigma(p;\varepsilon)$ (effective single-particle potential or mass operator), which determines the properties of the system. Necessary for the calculation of the effective single-particle potential is the knowledge of the scattering matrix (T-matrix) in matter, which plays in the calculation the role of an effective two-body potential.

The basic point is how the intermediate scattering states in matter (propagators) are treated. In particular we investigated three different propagators, namely the so called $\Lambda^{(ij)}$-approximations (ij=00,10,11). In the first approximation, the intermediate two-particle propagator, $\Lambda^{(00)}$, represents free-particle propagation; in the second, called $\Lambda^{(10)}$, one of the particles is treated as "dressed" whereas the other particle propagates as a free one. Finally in the third approximation, called $\Lambda^{(11)}$, which is in principle thermodynamically consistent, the intermediate states include both interacting particles and holes. In addition Pauli principle effects were included in the last two approximations.

The starting point in the calculation of the $T^{(11)}$-matrix was the integral equation $T^{11}=T^{00}+2^{-1}T^{00}(\Lambda^{11}-\Lambda^{00})T^{11}$. This equation was iterated only once. Test calculations made by Weigel and Gall 1976 (GW76+) supported this approximation, except in the vicinity of the pole in the triplet $T^{(00)}$-matrix. However in calculating the properties of nuclear matter this region is not needed.

Our calculations were performed for the "phenomenological" hard-core potential of Hamada-Johnston, the Reid-soft-core potential

and the "realistic" Paris-Nucleon-Nucleon potential.
The medium-range and long-range parts of the latter potential are based on the meson theory of nuclear forces.
In the calculations reported here we used all states of the two-nucleon system of both even and odd parity for orbital quantum numbers $L \leq 2$.
The obtained results for the energies per particle at saturation still differ from the experimental value of ≈ -16 MeV ($p_F = 1.36\ F^{-1}$), but in comparison with other competing treatments (see for instance Mahaux (MA81)) the values are satisfactory.
Using the $\Lambda^{(11)}$-approximation and the Hamada-Johnston potential a binding energy of -5.88 MeV per nucleon was obtained. For the Reid-soft-core potantial and the Paris potential we found -11 MeV and -12.2 MeV respectively. The corresponding Fermi momenta at stability are still too large (see table 16). Contrary to expectations - probably caused by additional assumptions, necessary in the numerical treatment (see chapter 7) - no better fulfillment of the Hugenholtz-van-Hove theorem on the equality of the chemical potential and the average energy is achieved in the $\Lambda^{(11)}$-approximation.

Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit war, ausgehend von der Wechselwirkung zweier Nukleonen, die Berechnung der Kenngrößen der Kernmaterie wie Energie pro Nukleon, chemisches Potential, Kompressibilität, effektive Masse etc. Als Vielteilchentheorie wird die Methode der Greenschen Funktionen (GF) verwendet, die eine elegante und durchsichtige Formulierung erlaubt. Die GF genügen einem gekoppelten Integro-Differentialgleichungssystem, dessen Entkopplung via Faktorisierung auf die sog. $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen (ij=00,10,11) führt. Die Hauptaufgabe bestand in der Berechnung der Selbstenergie (Massenoperator, effektives Einteilchenpotential) $\Sigma(p;\varepsilon)$ eines Teilchens, das an ein (unendliches) Nukleonensystem gekoppelt ist, als Funktion der Energie ε und des Impulses p. Via $\Sigma(p;\varepsilon)$ wurden die Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$, die Impulsverteilung n(p) und die physikalisch wichtigen Größen (Energie pro Nukleon, chemisches Potential etc.) berechnet.

Als Nukleon-Nukleon-Potantiale wurden das Hamada-Johnston-, das Reid-Soft-Core- und das im mittel- und langreichweitigen Anteil über die Mesonentheorie der Kernkräfte berechnete sog. Paris-Potential verwendet.

Besondere Beachtung wurde auf die $\Lambda^{(11)}$-Methode gelegt. Zur selbstkonsistenten Lösung dieser Gleichungen dienten für ein Iterationsverfahren die Ergebnisse aus $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Rechnungen. (Außer dem $\Lambda^{(11)}$-Propagator wurde zusätzlich der Propagator von Galitskii und Migdal $\Lambda^{(G)}$ (GM58,BSI74) zu Berechnung der $T^{(11)}$-Streumatrix benutzt.)

Die betrachteten Partialwellen des Zweinukleonen-Streuproblems waren $^1S_0$, $^3S_1+^3D_1$, $^1D_2$, $^3D_2$, $^3D_3$, $^1P_1$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Minima der Bindungsenergien pro Nukleon in Kernmaterie im Fall der $\Lambda^{(00)}$-Methode näherungsweise mit den Resultaten der Brueckner-Methode übereinstimmen (Tabelle 17). Die thermodynamisch konsistente $\Lambda^{(11)}$-Methode liefert Bindungsenergien von -5.88 MeV (p_F=1.24 F^{-1}, HJ-Potential), -11 MeV (p_F=1.4 F^{-1}, RSC-Potential) und -12.2 MeV (p_F=1.62 F^{-1}, PAR-Potential), während der experimentelle Wert ca. -16 MeV (p_F=1.36 F^{-1}) beträgt.

Entgegen der Erwartung wird das Hugenholtz-van-Hove-Theorem (HV58) (Gleichheit von chemischem Potential und Bindungsenergie pro Nukleon am Sättigungsimpuls) von der $\Lambda^{(11)}$-Approximation nicht besser erfüllt, was wahrscheinlich durch zusätzlich notwendige Approximationen bedingt ist.

Inhalt Seite

Abstract I

Zusammenfassung III

1. Einleitung und Übersicht. 1

2. Feldtheoretische Beschreibung eines Fermionensystems. 9

2.1 Definition der Greenschen Funktionen und Feldoperatoren. 9

2.2 Entkopplung des Integro-Differentialgleichungssystems der Greenschen Funktionen via Faktorisierung der Sechspunktfunktion. 16

2.3 Massenoperator, T-Matrix und Dysongleichung. 22

2.4 Funktionalmethode und Leiternäherungen der irreduziblen Teilchen-Loch-Wechselwirkung I und der Streuamplitude Γ. 26

2.5 Fouriertransformation der Zweipunktfunktion und Spektraldarstellung. 32

3. Analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene. 37

3.1 Eigenschaften der Zweipunktfunktion und der Dysongleichung. 37

3.2 Eigenschaften der T-Matrix und der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren. 43

3.3 Berechnung der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren. 46

4. Formulierung des Nukleon-Nukleon-Streuproblems. 51

4.1 Anmerkung zur Zerlegung nach Drehimpulsfunktionen (Multipolentwicklung). 52

4.2 Partialwellenentwicklung des $\Lambda^{(00)}$-Propagators. 54

4.3 Multipolentwicklung und Raumwinkelmittelung des $\Lambda^{(10)}$-Propagators. 58

4.4 Multipolentwicklung und Raumwinkelmittelung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators. 66

4.5 Die off-shell Lippmann-Schwinger (OLS)-Integralgleichung. 72

4.6 Die off-shell Schrödinger-Gleichung (OSG). 74

4.7 Behandlung des Streuproblems bei Hard-Core-Potentialen. 77

5. Nukleon-Nukleon-Potentiale. 80

5.1 Tensorzerlegung und Fouriertransformation. 81

5.2 Das Hamada-Johnston-Potential. 84

5.3 Das Reid-Soft-Core-Potential. 89

5.4 Das Paris-Nukleon-Nukleon-Potential. 92

6. Die Integralgleichung $T^{ij}=T^{00}+2^{-1}T^{00}(\Lambda^{ij}-\Lambda^{00})T^{ij}$. 104

6.1 Multipolentwicklung der Integralgleichung. 106

6.2 Iteration der $T^{(11)}$-Matrix (Korrektur zum Born-Term der $T^{(11)}$-Matrix). 110

7. Die Gleichungen der $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen. 115

7.1 Die $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Approximation. 115

7.2 Die $\Lambda^{(11)}$-Approximation. 120

7.3 Polarisations- und Korrelationskorrekturen in der $\Lambda^{(11)}$-Näherung für Kernmaterie. 140

8. Numerische Auswertung. 149

8.1 Lösung der Integralgleichungen für $T^{(ij)}$ via $\Omega^{(ij)}$. 150

8.2 Berechnung der $T^{(00)}$-Matrix. 153

8.3 Programmierung im Fall des Paris-Potentials. 157

8.4 Selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen. 164

8.5 Selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen. 170

9. Diskussion und Schlußbemerkungen. 174

9.1 Die $\Lambda^{(00)}$-Approximation. 174

9.2 Die $\Lambda^{(10)}$-Approximation. 176

9.3 Die $\Lambda^{(11)}$-Approximation. 177

A. Anhänge. 183

A.1 Real- und Imaginärteile des $\Lambda^{(00)}$-Propagators. 183

A.2 Real- und Imaginärteile des $\Lambda^{(00)}$-Propagators und der Hilfsfunktionen $\hat{\varphi}_L$. 184

A.3 Ortsableitungen des $\Lambda^{(00)}$-Propagators. 190

A.4 Restabschätzung der $\Lambda^{(10)}$-Propagatorintegrale. 196

A.5 $\Lambda^{(ij)}$-Computerprogramme. 198

A.5.1 $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Programm. 198

A.5.2 $\Lambda^{(11)}$-Programm. 201

A.6 Programmanforderungen auf den CYBER A/B Computern. 204

A.7 Abkürzungsverzeichnis. 205

A.8 Überblick über die theoretischen Methoden zur Behandlung des quantenmechanischen Vielteilchenproblems. 206

A.8.1 Brueckner-Bethe-Goldstone (BBG)-Entwicklung. 206

A.8.2 Jatrow-Theorie. 208

A.9 Anmerkungen zum Modell der Kernmaterie. 210

A.9.1 Kernmaterie in Leiternäherung. 210

A.9.2 T- und S-Matrix in Kernmaterie. 211

Abbildungen mit Abbildungsunterschriften. 215

Tabellen. 235

Literaturverzeichnis. 248

1. Einleitung und Übersicht.

Nach der Entdeckung des Neutrons im Jahre 1932 schien die Frage der Zusammensetzung der Atomkerne gelöst. Als elementare Teilchen galten die (punktförmigen) Protonen und Neutronen (sog. Nukleonen), die durch die starke Wechselwirkung im Atomkern zusammengehalten wurden. Besondere Eigenschaften der Kernkräfte waren die kurze Reichweite ($\approx 10^{-15}$ m) und ihre im Vergleich zur Coulombkraft hundertmal größere Stärke. Weiterhin sind sie ladungsunabhängig, d.h. in gleichen Zuständen gibt es bezüglich der starken Wechselwirkung keinen Unterschied zwischen Proton und Neutron. Deshalb ist es vorteilhaft, eine neue Quantenzahl - den sog. Isospin - einzuführen und Proton bzw. Neutron in Analogie zum halbzahligen Spin als zwei "Ladungszustände" im Isospinraum des Nukleons aufzufassen.

Damit war - im Prinzip - der Weg zur Behandlung des nuklearen Vielkörperproblems geöffnet. Zu lösen war ein Vielfermionenproblem mit nichtrelativistischer, isospin-invarianter Zweiteilchenwechselwirkung, die den üblichen Symmetrien (Rotationsinvarianz, Zeitspiegelungsinvarianz etc.) genügt. (Effekte aufgrund der Coulombkräfte sind wahrscheinlich klein und können zusätzlich mittels der Störungstheorie erfaßt werden).

Wegen des Fehlens einer quantitativen Theorie der Kernkräfte war und ist man deshalb auf (semi-) phänomenologische Zweiteilchenpotentiale angewiesen, die an Nukleon-Nukleon-Streudaten und das Deuteronsystem angepaßt sind.

Dieses Bild des Kerns - mit in theoretischer Sicht noch einfacher Struktur - ist im Lauf der Zeit zuerst mit den Pionen (Yukawa 1935) als Träger der starken Wechselwirkung und später mit der Quanten-

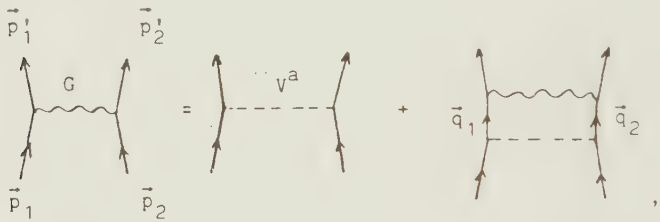
chromodynamik konfrontiert worden. Nach der Mesonentheorie (BJ76) wird die starke Wechselwirkung durch den Austausch von Mesonen (z.B. π-, ω-, ρ-Mesonen etc.) vermittelt und deshalb könnten sich Pionen (und angeregte Nukleonenzustände wie die Δ-Resonanz) im Kern befinden. Allerdings gibt es bisher von experimenteller Seite keine zwingenden Hinweise für das Vorkommen von Pionen und Δ-Resonanzen. Weiterhin wurden die Vorstellungen, insbesondere der Mesonenaustausch, in modernen Zweiteilchenpotentialen weitgehend berücksichtigt (z.B. im sog. Parispotential (L+81)).
Nach dem Quarkmodell sind Nukleonen und Pionen zusammengesetzte Teilchen und die Wechselwirkung wird durch das sog. Gluonenfeld vermittelt, das durch die "Farbladung" an die Quarks koppelt (CK81) Allerdings sind durch das "Confinement" die Nukleonen farbneutral - entsprechend der elektrischen Neutralität der Atome und Moleküle - so daß die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nur der Rest der starken Kraft des farbneutralen Nukleons ist. Die Nukleonenbindung entspric damit, für nicht zu kleine Abstände, der kovalenten Bindung - d.h. Quarkaustausch und Bosonenaustausch der Mesonentheorie der Kernkräfte sind in vieler Hinsicht äquivalent.
Für kleine Abstände kommt noch die direkte Wechselwirkung zwischen den Farbladungen ins Spiel (entsprechend der van der Waals Kraft), die sich durch die mögliche Behandlung der QCD für kleine Abstände, wie bei den semi-phänomenologischen Potentialen, als abstoßend erweist.

Aus diesen Gründen ist die gegebene Beschreibung des kernphysikalischen Vielkörperproblems nicht völlig ausreichend. Trotzdem ste die nichtrelativistische Behandlung der Kernmaterie ein interessantes und schwieriges Vielkörpermodell dar, dessen Test im Rahmen verschiedener Vielteilchenapproximationen wichtig ist.

Nukleonen verhalten sich im Kern näherungsweise wie freie Teilchen, was zunächst im Widerspruch zur starken Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu stehen scheint. Eine heuristische Erklärung für dieses Verhalten geht auf V.F. Weisskopf (WE58) zurück. Trotz der starken Wechselwirkung für kleine Abstände ist die Kraft vom Standpunkt der Vielteilchentheorie schwach, da der Impulsaustausch des anziehenden Anteils der Wechselwirkung kleiner als der Fermiimpuls ist. Damit wird dieser Anteil wegen des Pauliprinzips nur gering wirksam- oder anders ausgedrückt: Zweiteilchenkorrelationen sind auf kleine Abstände beschränkt. Als Folge ergibt sich, daß zumindestens für den Grundzustand das Modell der punktförmigen Nukleonen mit nichtrelativistischem Zweiteilchenpotential eine physikalisch sinnvolle Beschreibung darstellt, wobei der Zustand eine vorwiegende Einteilchenstruktur mit kurzreichweitigen Zweiteilchenkorrelationen haben sollte. Wie später noch näher diskutiert wird, sind in diesem Konzeptionsrahmen noch verschiedene Realisierungsmöglichkeiten offen, die sich bezüglich der theoretischen Struktur (z.B. Berücksichtigung verschiedener Beiträge zur Teilchen-Teilchen- oder Loch-Loch Propagation, Selbstkonsistenz etc.), der Herleitungsmethode der Störungstheorie (Partialsummationen, Variationsansätze für die Wellenfunktionen, Superpositionsapproximationen etc.) und der Schwierigkeit der mathematischen Behandlung unterscheiden.

Der erste Durchbruch gelang Brueckner und Mitarbeitern, indem sie bei der Behandlung der Zweiteilchen-Wellenfunktion in Materie nur Impulsüberträge des Potentials erlaubten, die oberhalb des Fermiimpulses liegen. Mathematisch handelt es sich um eine Lippmann-Schwinger-Gleichung, bei der der intermediäre Zweiteilchenpropagator auf unbesetzte Zweiteilchenzustände beschränkt ist. Aufgrund der Unschärferelation ist es physikalische plausibel, daß dadurch d. Zweiteilchen-Wellenfunktion bei großen Abständen in das unkorrelierte

Produkt der beiden Einteilchen-Wellenfunktionen übergeht ("healing" Erreicht wird mit dieser Approximation, daß der extrem kurzreichweitige und stark repulsive Teil der Wechselwirkung (Reichweite ≈.5 F) weitgehend berücksichtigt wird zusammen mit dem Anteil des anziehenden Potantials, der zur Streuung in unbesetzte Zustände imstande ist. Auf diese Weise wird bereits ein wesentlicher Teil der (dynamischen) kurzreichweitigen Zweiteilchenkorrelationen erfaßt und "asymptotisch" das unabhängige Einteilchenmodell erhalten. In Feynman-Graphen stellt sich die Streumatrix in Materie in dieser Näherung wie folgt dar:



wobei in den Zwischenzuständen nur Teilchen (im selbstkonsistenten Einteilchenpotential) in unbesetzten Niveaus erlaubt sind.

Eine weitere Möglichkeit, die schon erwähnt wurde, geht von einem direkten Ansatz für die Wellenfunktion mit "healing" Eigenschaften aus, der kurzreichweitige Korrelationen enthält. Mittels Minimisierung des Erwartungswertes der Energie erhält man dann - analog wie in der Hartree-Fock-Theorie - die zu lösenden Gleichungen(*).

(*) Im Anhang ist ein Überblick über die Methoden zur Behandlung quantenmechanischer Vielteilchensysteme gegeben.

Im Laufe der Entwicklung haben sich bei der Behandlung des Vielkörpersystems feldtheoretische Methoden sehr bewährt, da sie eine elegante Formulierung des Problems ermöglichen. Als Beispiel sei hier nur die automatische Berücksichtigung des Pauliprinzips erwähnt. Besonders effektiv in dieser Hinsicht ist die Methode der Greenschen Funktionen, die im 2. Abschnitt näher dargestellt wird. Die schwierige mathematische Struktur des Vielkörperproblems wird relativ durchsichtig in diesem Verfahren. Ein weiterer Vorteil ist, daß sie einerseits gerade die wesentliche Struktur des Systems erfassen, andererseits gestattet ihre Kenntnis (insbesondere die sog. Greensche Zweipunktfunktion) die Berechnung aller physikalischer Größen mittels einfacher mathematischer Methoden (nur Integrationen bzw. Summationen und Differentiationen sind erforderlich). Trotzdem sind auch bei dieser Methode umfangreiche mathematische Schwierigkeiten zu bewältigen, die weitere Näherungsmaßnahmen erfordern.

Eine entscheidende Approximation ist die sog. Kernmaterienäherung, in der man ein uniformes unendlich ausgedehntes Medium von gleichviel (strukturlosen) Protonen und Neutronen mit abgeschalteter Coulombwechselwirkung bei räumlich konstanter Dichte ($\rho = N/\Omega = \text{const}$, Nukleonenzahl $N \to \infty$, $\Omega \to \infty$) betrachtet, die via eines nichtrelativistischen Nukleon-Nukleon-Potentials miteinander wechselwirken(*).

Obwohl es sich um ein hypothetisches System handelt, erscheint es nicht unphysikalisch, dieses Problem zu behandeln. Die Analyse des vorliegenden Materials aus der Kernphysik zeigt, daß zumindest das

---

(*) Es ist also möglich, Systeme mit unterschiedlicher Protonen- und Neutronenzahl - z.B. Neutronensterne - zu behandeln.

Innere schwerer Atomkerne sich wie Kernmaterie verhält(*). Führt man die Extrapolation der Kerndaten durch - mittels einer Analyse der Bethe-Weizsäcker-Formel (WE35,BB36) - so sollte die selbstgebundene Kernmaterie folgende Eigenschaften haben (BV72,PW79):

1) Energie pro Nukleon $E/N \approx -16$ MeV,
2) Sättigungsdichte $\rho_0 \approx .17\ F^{-3}$ (entsprechend einem Fermiimpuls von $p_F \approx 1.36\ F^{-1}$),
3) Inkompressibilität $\varkappa \approx 210$ MeV.

Die mathematischen Vereinfachungen, die sich bei diesem System ergeben, sind evident, da man Oberflächen- und Krümmungseffekte vermeidet. Man weiß a priori die (selbstkonsistente) Einteilchen-Wellenfunktion, da das (selbstkonsistente) Einteilchenpotential ortsunabhängig sein muß. (Bei endlichen Kernen erfordert die Klassifizierung der Einteilchen-Wellenfunktion nach Drehimpuls, radiale Quantenzahl etc. einen großen technischen Aufwand, der die numerische Behandlung sehr kompliziert.

(*) Eine realistische Vielteilchentheorie der Kernmaterie kann dazu benutzt werden, die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zu studieren. Die heutzutage in der nichtrelativistischen Vielteilchentheorie verwendeten phänomenologischen Potentiale sind an die experimentellen Streuphasen und Kenngrößen des Deuterons, des einzigen gebundenen Zweinukleonenzustandes, angepaßt. Die Streuphasen in Verbindung mit den Kenngrößen des Deuterons sind jedoch nicht ausreichend, um das N-N-Potential eindeutig festzulegen. Das Studium der Kernmaterie kann einen Einblick geben, wie die verschiedenen Terme des Potentials die Materieeigenschaften des Systems beeinflussen und welche Änderungen notwendig sind, um die obigen Daten 1) bis 3) zu reproduzieren. Mithin kann damit vor allem über die Frage entschieden werden, ob eine Potentialbeschreibung der Kernkräfte überhaupt ausreichend ist oder nicht (FI70,BPW70, CPS75,CH77).

Als Preis muß meist mit einer einfachen - zum großen Teil nicht befriedigenden - Näherung gearbeitet werden).
Es ist das Ziel dieser Arbeit, das Kernmaterieproblem mit aus der Greenschen Funktionstheorie stammenden Näherungen zu behandeln, die auf einer systematischen Aufspaltung der Dreiteilchenkorrelationen in Zweiteilchenkorrelationen gründen - analog der Superpositionsapproximation der Born-Green-Kirkwood-Boguljubow-Methode der klassischen statistischen Physik - wobei nur Korrelationen berücksichtigt werden, die mit dem Potential gekoppelt sind. Es handelt sich um ein nicht-störungstheoretisches Verfahren, wobei das gekoppelte Integro-Differentialgleichungssystem gemäß den geschilderten physikalischen Annahmen entkoppelt wird. Einzelheiten sind in Abschnitt 2 angegeben.

Zusammenfassend kann man das Vorhaben der vorliegenden Arbeit wie folgt definieren:

A) Behandlung des Systems der Kernmaterie im Rahmen der Greenschen Funktionsmethode, wobei mittels Berücksichtigung von Zweierkorrelationen das Vielteilchenproblem auf die Berechnung von Zwei- und Vierteilchenfunktionen reduziert wird (sog. A-Näherungen). Besonderer Wert wird auf die thermodynamisch konsistente Näherung - hier handelt es sich um die sog. $A^{(11)}$-Approximation - gelegt, bei der thermodynamische Relationen und Erhaltungssätze erhalten bleiben.

B) Bei der Rechnung sollen vorwiegend moderne Nukleon-Nukleon-Potentiale verwendet werden, in die mesonentheoretische Erkenntnisse soweit als möglich eingebaut worden sind. Hier ist vor allem das sog. Paris-Potential zu erwähnen (L+81), wo der durch π-Mesonenaustausch gekennzeichnete intermediäre- und

langreichweitige Anteil über die Mesonentheorie der Kernkräfte feldtheoretisch berechnet wurde. Die starke Abstoßung im kurzreichweitigen Bereich ($\lesssim .5$ F)(*) der N-N-Wechselwirkung durch den Austausch von ω- und ρ-Mesonen wird durch einen sog. Soft-Core phänomenologisch beschrieben. Nähere Einzelheiten sind im Abschnitt 5 angegeben.

Es ist anzumerken, daß selbst das dargestellte Vorhaben noch große numerische Schwierigkeiten beinhaltet, da im Prinzip mehrere gekoppelte Integro-Differentialgleichungen für Funktionen mit zum Teil 10 Variablen zu behandeln sind. Weiterhin hat das Paris-Potential keine einfache mathematische Struktur. Deshalb sind teilweise noch weitere Näherungen erforderlich, die im Verlauf der Arbeit erläutert werden.

(*) Die $^1S_0$-Streuphase wird bei ungefähr 250 MeV negativ (RFL62).

2. Feldtheoretische Beschreibung eines Fermionensystems.

Wir betrachten in diesem Kapitel einen Formalismus für Vielfermionensysteme, der auf feldtheoretischen Methoden unter Verwendung der Greenschen Funktionen basiert. Eine ausführliche Beschreibung der "Methode der Greenschen Funktionen" ist in den folgenden Standardwerken der Vielteilchentheorie zu finden: (TH61,BK62,AB63,SC64,NO64,FW71).

2.1 Definition der Greenschen Funktionen und Feldoperatoren.

Ein System wechselwirkender Fermionen kann in kompakter Weise durch Erzeugungs- und Vernichtungsfeldoperatoren $\psi_\alpha^+(t)$ und $\psi_{\alpha'}(t)$ beschrieben werden. Für unsere Zwecke wählen wir die Heisenberg-Darstellung der Feldoperatoren und bezeichnen mit den Indizes α und α' je einen vollständigen Satz von Quantenzahlen. Im Fall der Kernmaterie interessieren uns die Nukleonenquantenzahlen $\alpha = (\vec{r};\sigma,\tau)$ bzw. $\alpha = (\vec{p};\sigma,\tau)$ (*). Die Wirkung der Operatoren $\psi_\alpha^+(t)$ und $\psi_{\alpha'}(t)$ besteht darin, daß bei Anwendung auf einen Zustand des Vielteilchensystems $|\Phi\rangle$ $\psi_\alpha^+(t)$ ein zusätzliches Teilchen im Zustand $|\alpha\rangle$ zur Zeit t erzeugt, während $\psi_{\alpha'}(t)$ ein Teilchen im Zustand $|\alpha'\rangle$ zur Zeit t vernichtet.
Als Fermionensystem ist ein Vielnukleonenverband durch vollständige Antisymmetrie des Zustandes bei Vertauschung je zweier Nukle-

---

(*) Mit $\vec{r}$ und $\vec{p}$ werden Orts- und Impulsvektor, mit σ und τ Spin und Isospin bezeichnet. η steht für das Tupel (σ,τ).

onen ausgezeichnet. Diese Symmetrieforderung kommt in den Antikommutatorbeziehungen(*) der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\left\{ \psi_\alpha^+(t), \psi_{\alpha'}(t) \right\} = \delta_{\alpha\alpha'} , \qquad 2.1.1$$

$$\left\{ \psi_\alpha^+(t), \psi_{\alpha'}^+(t) \right\} = \left\{ \psi_\alpha(t), \psi_{\alpha'}(t) \right\} = 0 \qquad 2.1.1'$$

zum Ausdruck.

Aus (2.1.1') folgt unmittelbar $\psi_\eta^2(\vec{r},t)=0$, so daß dem Pauliprinzip der Fermi-Dirac Teilchen über die Kommutatorrelationen Rechnung getragen wird.

Der Hamiltonoperator H eines Vielteilchensystems mit Zweiteilchenwechselwirkung hat die Form

$$H = H_0 + \tilde{V}(\vec{r}_1 \vec{p}_1 \sigma_1 \tau_1, \ldots) \qquad 2.1.2$$

mit $$H_0 = \sum_j (2m)^{-1} \vec{p}_j^{\,2} , \qquad 2.1.3$$

$$\tilde{V}(\vec{r}_1 \vec{p}_1 \sigma_1 \tau_1, \ldots) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\vec{r}_i \vec{p}_i \sigma_i \tau_i, \vec{r}_j \vec{p}_j \sigma_j \tau_j) . \qquad 2.1.4$$

Der Vollständigkeit halber geben wir den Hamiltonoperator im Heisenber-Bild(**) in zweiter Quantisierung (Besetzungszahldarstellung) an:

(*) $\{A,B\} = AB + BA$, $\delta_{\alpha\alpha'} = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta_{\eta\eta'}$ bzw. $\delta_{\alpha\alpha'} = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{\eta\eta'}$.
Im Sinn einer kompakten Matrixschreibweise wird in vielen Gleichungen nicht zwischen diskreten- und kontinuierlichen Quantenzahlen, Kronecker-Symbolen und δ-Funktionen sowie Summationen und Integrationen unterschieden. Falls nicht anderst erwähnt, benutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention, wonach über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.

(**) Die verallgemeinerte antisymmetrisierte Wechselwirkung $V^{(a)}$ ist durch ($1 \equiv (\vec{r}_1, t_1, \eta_1) \equiv (\alpha_1, t_1)$)
$\langle 12 | V^{(a)} | 1'2' \rangle := \delta(t_1-t_2)\,\delta(t_2-t_1')\,\delta(t_1-t_2')\,\frac{1}{2}\left(\langle \alpha_1\alpha_2 | V | \alpha_1\alpha_2 \rangle - \langle \alpha_1\alpha_2 | V | \alpha_2\alpha_1 \rangle\right)$
definiert.

$$H(t) = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\eta} \int d^3\vec{r} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi^+_{\eta}(\vec{r};t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi_{\eta}(\vec{r};t) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\eta_1 \eta_2} \sum_{\eta_1' \eta_2'} d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_2\, d^3\vec{r}_1{}'\, d^3\vec{r}_2{}' \quad \psi^+_{\eta_1}(\vec{r}_1;t)\, \psi^+_{\eta_2}(\vec{r}_2;t) \qquad 2.1.5$$

$$\langle \vec{r}_1 \eta_1 \vec{r}_2 \eta_2 | V^{(a)} | \vec{r}_1{}' \eta_1' \vec{r}_2{}' \eta_2' \rangle \quad \psi_{\eta_2'}(\vec{r}_2{}';t)\, \psi_{\eta_1'}(\vec{r}_1{}';t)^{(*)} .$$

Für spätere Zwecke notieren wir den Dichteoperator

$$n_{\eta}(\vec{r};t) = \psi^+_{\eta}(\vec{r};t)\, \psi_{\eta}(\vec{r};t) , \qquad 2.1.6$$

der die Teilchendichte am Punkt $(\vec{r};t)$ festlegt. Den Operator der Gesamtteilchenzahl N(t) erhalten wir aus (2.1.6) durch Integration (Summation)

$$N(t) = \sum_{\eta} \int d^3\vec{r}\, \psi^+_{\eta}(\vec{r};t)\, \psi_{\eta}(\vec{r};t) . \qquad 2.1.7$$

Oft ist der Übergang zu einer anderen Darstellung nützlich. Wenn $|\chi\rangle$ die entsprechenden Einteilchenzustände sind,

$$\mathbb{1} = \sum_{\chi} |\chi\rangle\langle\chi| , \qquad 2.1.8$$

so gilt für die dazugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+_{χ}, a_{χ}

$$\psi^+(\vec{r};t) = \sum_{\chi} \langle \chi | \vec{r} \rangle\, a^+_{\chi}(t), \qquad 2.1.9$$

$$\psi(\vec{r};t) = \sum_{\chi} \langle \vec{r} | \chi \rangle\, a_{\chi}(t). \qquad 2.1.9'$$

Häufig verwendet wird der Übergang in die Impulsdarstellung(**).

(*) Im folgenden setzen wir meist $\hbar^2/m=1$. Dies impliziert einen Umrechnungsfaktor $F^{-2}=41.47$ MeV.

(**) $\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = (2\pi)^{-3/2}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

Als Definition der n-Teilchen (2n-Punkt)-Greenfunktion benutzen wir (MI66)

$$G^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \alpha_n' \ldots \alpha_1'}(t_1 ; \ldots t_{n'}) = (-i)^n \langle \phi_0 | T (\psi_{\alpha_1}(t_1) \ldots \psi_{\alpha_n}(t_n) \psi^+_{\alpha_n'}(t_{n'}) \ldots \psi^+_{\alpha_1'}(t_{1'}) | \phi_0 \rangle \qquad 2.1.10$$

$$= (-i)^n \sum_{P(1 \ldots n' \ldots 1')} \operatorname{sgn}(P) \langle \phi_0 | a_{P_1}(t_{P_1}) \ldots a_{P_{1'}}(t_{P_{1'}}) | \phi_0 \rangle \, \theta(t_{P_1} - t_{P_2}) \ldots \theta(t_{P_{1'}} - t_{P_{n'}}) , \qquad 2.1.11$$

$$a_i := \begin{cases} \psi_{\alpha_i} , & i = 1, \ldots, n \\ \psi^+_{\alpha_i} , & i = 1', \ldots, n' \end{cases} , \qquad 2.1.12$$

$$\theta(\tau) := \begin{cases} 0 , & \tau < 0 \\ e^{-o\tau} , & \tau > 0 \end{cases} . \qquad 2.1.13$$

Die Summe in (2.1.11) läuft über alle Permutationen P mit der Parität sgn(P), die das 2n-Tupel (1....n;n'....1') in (P_1....P_n, $P_{n'}$,....$P_{1'}$) überführen. Die in (2.1.13) definierte verallgemeinerte Heaviside-Funktion enthält ein infinitesimales Omikron o>0, das die Konvergenz der Integrale bei Fouriertransformationen sicherstellt (WEG69). Der Zeitordnungsoperator T in (2.1.10) ordnet die Feldoperatoren von links nach rechts mit wachsenden Zeitargumenten. $|\phi_0\rangle$ bezeichnet den normierten Grundzustand des N-Teilc Fermionensystems: $\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1$, $H|\phi_0\rangle = E_0(N)\,|\phi_0\rangle$.

Die Zweipunktfunktion (n=1) lautet nach (2.1.10) mithin

$$G^{(1)}_{11'} = -i \langle \phi_0 | \psi_{\alpha_1}(t_1) \psi^+_{\alpha_1'}(t_{1'}) | \phi_0 \rangle \; \theta(t_1 - t_{1'}) + i \langle \phi_0 | \psi^+_{\alpha_1'}(t_{1'}) \psi_{\alpha_1}(t_1) | \phi_0 \rangle \; \theta(t_{1'} - t_1). \qquad 2.1.14$$

Physikalisch beschreibt die $G^{(1)}$-Funktion für Zeiten $t_1 > t_{1'}$, die Propagation eines zur Zeit $t_{1'}$ erzeugten Teilchens, das zum spä-

teren Zeitpunkt t_1 wieder vernichtet wird. Entsprechendes gilt für die Propagation eines zum Zeitpunkt t_1 erzeugten Lochzustandes, der zur Zeit $t_{1'}$ vernichtet wird ($t_{1'}>t_1$).
Das Integro-Differentialgleichungssystem der Greenschen Funktionen erhält man aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren(*)

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\psi_1(t_1) = i\,[H, \psi_1(t_1)] \qquad 2.1.15$$

in Verbindung mit den Kommutatorrelationen (2.1.1-1') und der Definition der n-Teilchen Greenfunktion (WEI66).
Es ist vorteilhaft, statt des Hamiltonoperators aus (2.1.5) den umgeeichten Operator

$$\mathcal{H} := H - \mu N \qquad 2.1.16$$

mit dem Teilchenzahloperator aus (2.1.7) zu verwenden. μ kennzeichnet das chemische Potantial, das für gebundene Systeme mit großer Teilchenzahl N durch(**)

$$\mu_N^{\pm} := \pm E_0(N+1) \mp E_0(N) \approx \frac{\partial E_0(N)}{\partial N}, \qquad 2.1.17$$
$$\mu := \lim_{N\to\infty} \mu_N^{\pm}$$

gegeben ist.

(*) $[A,B] = AB - BA$, $\hbar=1$.

(**) $E_0(N)$ ist die Grundzustandsenergie des N-Teilchensystems: $H|\phi_0\rangle = E_0(N)|\phi_0\rangle$.
Die Relation (2.1.17) stimmt mit der thermodynamischen Beziehung $\mu dN = dE - TdS + PdV$ im Limes T=0, P=0 überein. Für gebundene Systeme mit Einteilchencharakter sollte μ mit der Einteilchenenergie ε_F an der Fermikante übereinstimmen. Dieser Sachverhalt wird in Kapitel 7 genauer diskutiert.

Physikalisch entspricht μ derjenigen Energieänderung, die mit der Addition (Subtraktion) eines Nukleons zum N-Nukleonenzustand verbunden ist. Bei selbstgebundenen Systemen, wie etwa der Kernmaterie, ist das chemische Potential negativ, da die Addition eines zusätzlichen Teilchens die Gesamtenergie des Systems erniedrigt (mutatis mutandis bei Subtraktion).

Es ergibt sich dann folgendes Integro-Differentialgleichungssystem für die Greenschen Funktionen(*):

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^{\,2}} + \mu\right) G^{(n)}(1,\dots,n;1'\dots n') = \tag{2.1.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-)^{j+1}\,\delta(1-j')\; G^{(n-1)}(2,\dots n;1'\dots(j-1)',(j+1)'\dots n')_{j'\text{ fehlt}}$$

$$-\,i\oint d\tilde{1}\; d(n+1)\, d(n+1)'\, \langle 1(n+1)'|\, V^{(a)}\, |\tilde{1}(n+1)\rangle$$

$$G^{(n+1)}(\tilde{1}\,2\dots n(n+1)^{+};1'\dots n'(n+1)'^{++}),$$

$$\delta(1-1') \equiv \delta_{11'} \equiv \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_{1'})\,\delta(t_1-t_{1'})\,\delta_{\alpha_1\alpha_{1'}} \equiv \delta_{\alpha_1\alpha_{1'}}\,\delta(t_1-t_{1'}).$$

Die Pluszeichen an den Variablen legen die Zeiten und damit die Reihenfolge derjenigen Feldoperatoren fest, für die durch die verallgemeinerte Wechselwirkung $\langle 1(n+1)'|\, V^{(a)}\, |\tilde{1}(n+1)\rangle$ die Zeiten gleichgesetzt werden, so daß mithin

$$t_{(n+1)'} = t_{\tilde{1}} + 0 \tag{2.1.19}$$

$$\text{und } t_{n+1} = t_{(n+1)'} + 0 \text{ ist} \tag{2.1.19'}$$

Wie man sieht, koppelt in (2.1.18) aufgrund der Zweiteilchenwechselwirkung die 2n-Punkt Funktion mit der 2(n+1)-Punkt Funktion.

(*) Zur Definition von $V^{(a)}$ siehe Fußnote (**) auf Seite 10.

Für den Fall n=1 geht das System (2.1.18) über in

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^{\,2}} + \mu\right) G^{(1)}(1;1') = \delta(1-1') \qquad 2.1.20$$

$$- i \int d\tilde{1}\, d2\, d2'\, \langle 12'|V^{(a)}|\tilde{1}2\rangle\, G^{(2)}(\tilde{1}2^{+};1'2'^{++}),$$

woraus wir die Greensche Funktion $G^{(1)^0}$ für ein freies (V=0) Teilchen ablesen(*)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^{\,2}} + \mu\right) G^{0}_{\alpha_1\alpha_1'}(\vec{r}_1 t_1;\vec{r}_1' t_1') = \delta_{\alpha_1\alpha_1'}\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_1')\,\delta(t_1-t_1'), \qquad 2.1.21$$

die in der Form

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}\delta_{1\tilde{1}} - \langle\alpha_1|\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}|\tilde{\alpha}_1\rangle\,\delta(t_1-\tilde{t}_1) + \mu\,\delta_{1\tilde{1}}\right) G^{0}(\tilde{1};1) = \delta(1-1') \qquad 2.1.22$$

geschrieben werden kann.

Mit Hilfe des sog. Schrödingeroperators S

$$\langle 1|S|1'\rangle \equiv S(1;1') := \delta(t_1-t_1')\left(-i\,\delta_{\alpha_1\alpha_1'}\frac{\partial}{\partial t_1} + \langle\alpha_1|\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}|\alpha_1'\rangle - \mu\,\delta_{\alpha_1\alpha_1'}\right), \qquad 2.1.23$$

ergibt sich für Gleichung (2.1.20)

$$-S(1,\tilde{1})\, G^{(1)}(\tilde{1};1') + i\,\langle 12'|V^{(a)}|\tilde{1}2\rangle\, G^{(2)}(\tilde{1}2^{+},1'2'^{++}) = \delta_{11'}\,. \qquad 2.1.24$$

Das volle System (2.1.18) erhält die Form

$$- S(1;\tilde{1})\; G^{(n)}(\tilde{1}2\ldots n;1'\ldots n') \qquad 2.1.25$$

$$+ i\,\langle 1(n+1)'|V^{(a)}|\tilde{1}(n+1)\rangle\; G^{(n+1)}(\tilde{1}2\ldots n(n+1)^{+};1'\ldots n'(n+1)'^{++})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-)^{j+1}\,\delta_{1j'}\; G^{(n-1)}(2\ldots n;1'\ldots(j-1)'(j+1)'\ldots n').$$

(*) Der Kürze wegen setzen wir $G^{(1)^0} \equiv G^0$.

Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit der Berechnung der Zweipunktfunktion $G^{(1)}(1;1')$ beschäftigen, deren Kenntnis hinreicht, die Erwartungswerte von physikalischen Einteilchenoperatore und der Energie anzugeben. Zum Beispiel lauten die Ausdrücke für Dichte und Energie (PU61,PRW66,FW71)(*)

$$n(\alpha_1) = -i\, G^{(1)}(1;1^+), \qquad 2.1.26$$

$$\langle N \rangle = -i \oint d1\, G^{(1)}(1;1^+), \qquad 2.1.27$$

$$\langle H \rangle = -i \oint d1 \lim_{1'\to 1^+} \frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^{\,2}} + \mu \right) G^{(1)}(1,1'). \qquad 2.1.28$$

2.2 Die Entkopplung des Integro-Differentialgleichungssystems der Greenschen Funktionen via Faktorisierung der Sechspunktfunktion.

Im Prinzip muß zur Berechnung der Zweipunktfunktion $G^{(1)}(1;1')$ die vollständige Hierarchie der Gleichungen (2.1.25) gelöst werden. Ein möglicher Weg zur approximativen Berechnung der $G^{(1)}$-Funktion macht von der sog. Superpositionsapproximation Gebrauch, d das System (2.1.18) bzw. (2.1.25) entkoppelt. Um dies zu sehen, gehen wir von dem Gleichungsschema (2.1.18) aus, das mit Hilfe der freien Greenfunktion $G^0(1;1')$ von (2.1.21-22) in ein äquivalentes System von Integralgleichungen übergeführt werden kann (MS59,PU61,RE64,PRW66)(**):

(*) Wir erinnern an die Notationen $n^+=(\alpha_n, t_n+0)$, $\alpha_n=(\vec{r}_n,\gamma_n)$ bzw. $\alpha_n=(\vec{p}_n,\gamma_n)$.

(**) Die Frage der zu wählenden Randbedingungen ist in (MS59) diskutiert.

$$G^{(n)}(1\ldots n;1'\ldots n') = i\,G^{0}(1;n+3)$$
$$\langle (n+3)(n+4)|\,V^{(a)}\,|(n+1)(n+2)\rangle \qquad 2.2.1$$
$$G^{(n+1)}(2\ldots(n+1)(n+2);(n+4)^{+}\,1'\ldots n')$$
$$+\sum_{j'=1'}^{n'}(-)^{j'+1}\,G^{0}(1;j')$$
$$G^{(n-1)}(2\ldots n;1'\ldots(j'-1)(j'+1)\ldots n').$$

Für n=1 erhalten wir daraus unmittelbar die Integralgleichung

$$G^{(1)}(1;1') = G^{0}(1;1') + i\,G^{0}(1;4)\,\langle 45|\,V^{(a)}\,|23\rangle \qquad 2.2.2$$
$$G^{(2)}(23;5^{+}1').$$

Es ist mathematisch Vorteilhaft, im Zusammenhang mit der Vierpunktfunktion die Hilfsfunktion $\underset{\sim}{L}$ durch

$$G^{(2)}(12;1'2') \equiv G^{(1)}(1;1')\,G^{(1)}(2;2') - G^{(1)}(1;2')\,G^{(1)}(2;1') \qquad 2.2.3$$
$$+\,\underset{\sim}{L}(12;1'2')$$

einzuführen, welche die durch das Potential bedingten Korrelationen erfaßt. Das weitere Interesse ist damit auf die Bestimmung der Funktion $\underset{\sim}{L}(12;1'2')$ gerichtet.

Aus Gleichung (2.2.1) können mehrere exakte Ausdrücke für die Hilfsfunktion $\underset{\sim}{L}$ in Abhängigkeit der Sechspunktfunktion $G^{(3)}$ abgeleitet werden. Wir beschränken uns auf (PRW66)

$$\underset{\sim}{L}(12;1'2') = i\,G^{0}(1;3)\,\langle 34|\,V^{(a)}\,|56\rangle \qquad 2.2.4$$
$$\Big[\,G^{(3)}(256;4^{+}1'2') - G^{(1)}(2,2')\,G^{(2)}(56;4^{+}1')$$
$$+\,G^{(1)}(2;1')\,G^{(2)}(56;4^{+}2')\Big]$$

und

$$\underset{\sim}{L}(12;1'2') = i\, G^{(1)}(1;3) \quad \langle 34 | V^{(0)} | 56 \rangle$$
$$\left[G^{(3)}(256;4^{+}1'2') - G^{(2)}(56;4^{+}7)\,\left(G^{(1)}(7;8)\right)^{-1} G^{(2)}(82,1'2') \right]. \qquad 2.2.5$$

Um eine Näherung zu finden, die dynamische Zweiteilchenkorrelationen enthält, muß die $G^{(3)}$-Funktion passend faktorisiert werden. Dabei ist darüber zu entscheiden, welche Paarkorrelationen am wichtigsten sind. Falls Wechselwirkungen zwischen dem Paar (5;6) in den Gleichungen (2.2.4-5) berücksichtigt werden sollen, muß die Faktorisierung den Term $\underset{\sim}{L}$(56;..) enthalten. Andererseits tritt $\underset{\sim}{L}$(25;..) in der Faktorisierung auf, falls Korrelationen zwischen (2;5) wichtig sind usw.

Weiter muß die getroffene Wahl der Faktorisierung sich auf eine entsprechend symmetrisierte Kombination von sechs Termen der Form $G^0G^0G^0$ reduzieren, wenn sowohl die Wechselwirkung V als auch die Funktion $\underset{\sim}{L}$ gegen null streben (V->0, $\underset{\sim}{L}$->0). Auch schränkt die Antisymmetrie in den Indizes (1;2) und (1';2') die Wahl der Funktion $\underset{\sim}{L}$(12;1'2') ein.

Im Fall der Kernmaterie, wo die Reichweite der Kernkräfte und der mittlere Teilchenabstand der Nukleonen ungefähr gleich groß sind, können simultane Dreiteilchenkorrelationen vernachlässigt werden. Man beschränkt sich deshalb in (2.2.4) und (2.2.5) auf die Korrelationen des wechselwirkenden Nukleonenpaares (5;6).

In diesem Bild propagiert das korrelierte Nukleonenpaar (5;6), unte der Voraussetzung, daß der Abstand zwischen 5 und 6 hinreichend kl ist, um miteinander in Wechselwirkung treten zu können, unab-

hängig vom Teilchen 2. Diese Beschreibungsweise führt auf verschiedene "T-Matrix" Approximationen, die unten diskutiert werden. Die T-Matrix (Streumatrix) kann als Vertex aufgefaßt werden, der den Übergang eines Teilchenpaares von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ beschreibt, das in ein Vielteilchensystem (im Grundzustand mit der Temperatur T=0) eingebettet ist.

Die oben angegebenen Forderungen und die Bewegungsgleichungen für die Sechspunktfunktion $G^{(3)}$ sind jedoch nicht hinreichend, um eine eindeutige Approximation angeben zu können. So erfüllen die beiden Näherungen (PU61,PRW66,FI70)

$$\langle 34|V^{(a)}|56\rangle\, G^{(3)}(256;4^+1'2') \approx \langle 34|V^{(a)}|56\rangle \left[G^{(1)}(2;4)\, G^{(2)}(56;1'2') - G^{(1)}(2;1')\, G^{(2)}(56;4^+2') + G^{(1)}(2,2')\, G^{(2)}(56;4^+1') \right] \tag{2.2.6}$$

und

$$\langle 34|V^{(a)}|56\rangle\, G^{(3)}(256;4^+1'2') \approx \langle 34|V^{(a)}|56\rangle \left[G^{(1)}(2;4)\, G^{(2)}(56;1'2') + G^{(2)}(56;4^+7)\,(G^{(1)}(7;8))^{-1}\, G^{(2)}(82;1'2') \right] \tag{2.2.7}$$

die obigen Bedingungen im Fall kurzreichweitiger Wechselwirkungen. Diese beiden Ausdrücke führen auf zwei verschiedene approximative Gleichungen für die Hilfsfunktion $\underset{\sim}{L}$. Man findet

$$\underset{\sim}{L}(12;1'2') \approx \frac{1}{2} i \left[G^{0}(1;3)\; G^{(1)}(2;4) - G^{0}(2;3)\; G^{(1)}(1;4) \right] \langle 34 | V^{(0)} | 56 \rangle\; G^{(2)}(56;1'2') \qquad 2.2.8$$

oder

$$\underset{\sim}{L}(12;1'2') \approx i\; G^{(1)}(1;3)\; G^{(1)}(2;4)\; \langle 34 | V^{(0)} | 56 \rangle\; G^{(2)}(56,1'2'), \qquad 2.2.9$$

wobei Gleichung (2.2.8) in den Indizes (1;2) explizit antisymmetrisiert worden ist.

Im nächsten Schritt setzen wir die Näherungen (2.2.8) und (2.2.9) in die Gleichung für die Vierpunktfunktion (2.2.3) ein. Dies führt auf

$$G^{(2)}(12;1'2') = G^{(1)}(1;1')\; G^{(1)}(2;2') - G^{(1)}(1;2')\; G^{(1)}(2;1') + \frac{1}{2} i \left[G^{0}(1;3)\; G^{(1)}(2;4) - G^{0}(2;3)\; G^{(1)}(1;4) \right] \langle 34 | V^{(0)} | 56 \rangle\; G^{(2)}(56;1'2') \qquad 2.2.10$$

bzw.

$$G^{(2)}(12;1'2') = G^{(1)}(1;1')\; G^{(1)}(2;2') - G^{(1)}(1,2')\; G^{(1)}(2,1') + i\; G^{(1)}(1;3)\; G^{(1)}(2;4)\; \langle 34 | V^{(0)} | 56 \rangle\; G^{(2)}(56,1'2'). \qquad 2.2.11$$

In den Integralgleichungen (2.2.10-11) für die Vierpunktfunktion $G^{(2)}$ führen wir nun die $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren (ij=11,10,00) ein:

$$\Lambda^{(10)}(12;1'2') := \tfrac{1}{2}\, i \left[G^{0}(1;1')\, G^{(1)}(2;2') - G^{0}(2;1')\, G^{(1)}(1;2') \right], \qquad 2.2.12$$

$$\Lambda^{(11)}(12;1'2') := i\; G^{(1)}(1;1')\; G^{(1)}(2;2')\,. \qquad 2.2.13$$

Die mathematisch einfachste Struktur besitzt offensichtlich(*)

$$\Lambda^{(00)}(12;1'2') := i\; G^{0}(1;1')\; G^{0}(2;2')\,. \qquad 2.2.14$$

Wie man sofort sieht, reduzieren sich die Gleichungen (2.2.10-11) für den Fall $V \equiv 0$ auf

$$G^{(2)}(12;1'2') = G^{(1)}(1;1')\, G^{(1)}(2;2') - G^{(1)}(1;2')\; G^{(1)}(2;1')\,. \qquad 2.2.15$$

Dies ist die sogenannte Hartree-Fock-Approximation, die keinerlei dynamische Korrelationen zwischen dem Nukleonenpaar (1;2) berücksichtigt (vgl. mit Anhang A.8)(**).

(*) Kernmaterie auf der Grundlage der $\Lambda^{(ij)}$-Näherungen wurde u.a. von den Autoren (PU61,PRW66,FOS66,WW68,FF71,FF72,GWW75, GW76,HM78) untersucht.

(**) Statistische Effekte sind durch das Pauliprinzip enthalten. Für unsere Untersuchungen - bedingt durch die Stärke des Potentials - ist diese Näherung nicht anwendbar. Erst die Verwendung der "wahren" Zweiteilchen-Wellenfunktion $\Psi^{JST}_{LL'}(p,p';E)$ (s. Kapitel 4), die sich auf Grund der Zweiteilchenkorrelationen von der ebenen Welle unterscheidet, führt auf sinnvolle Lösungen bei Verwendung realistischer Nukleon-Nukleon-Potentiale. Der genaue Sachverhalt wird in den Abschnitten 5 bis 7 von Kapitel 4 diskutiert.

2.3 Massenoperator, T-Matrix und Dysongleichung.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit der Entkopplung des Integro-Differentialgleichungssystems der Greenschen Funktionen befaßt. Um nun zu einem System von Gleichungen zur Berechnung physikalischer Observabler der Kernmaterie zu gelangen, müssen neue Größen wie Massenoperator (effektives Einteilchenpotential, Selbstenergie) und T-Matrix (effektives Zweiteilchenpotential) eingeführt werden. Wir beginnen mit dem Massenoperator Σ, der durch die Gleichung

$$\Sigma(1;\tilde{1}')\, G^{(1)}(\tilde{1}';1') = i \langle 12' | V^{(0)} | \tilde{1}2 \rangle\, G^{(2)}(\tilde{1}2^{+};1'2'^{++}) \qquad 2.3.1$$

definiert ist. Diese Beziehung legt nahe, eine T-Streumatrix gemäß

$$\langle 12 | T | 1''2'' \rangle\, G^{(1)}(1'';1')\, G^{(1)}(2'';2') = \langle 12 | V^{(0)} | 1''2'' \rangle\, G^{(2)}(1''2'';1'2') \qquad 2.3.2$$

einzuführen.

Die Gleichungen (2.2.10-11) für die Vierpunktfunktion $G^{(2)}$ gehen damit in die Integralgleichung

$$\langle 12 | T^{(ij)} | 1'2' \rangle = 2 \langle 12 | V^{(0)} | 1'2' \rangle + \langle 12 | V^{(0)} | \tilde{1}\tilde{2} \rangle\, \Lambda^{(ij)}(\tilde{1}\tilde{2};\tilde{1}'\tilde{2}') \langle \tilde{1}'\tilde{2}' | T^{(ij)} | 1'2' \rangle \qquad 2.3.3$$

über, die wir der Kürze wegen häufig in der Operatornotation

$$T^{(ij)} = 2V^{(0)} + V^{(0)} \Lambda^{(ij)} T^{(ij)} \qquad 2.3.4$$

schreiben werden.

Mit (2.3.1) erhalten wir für die Einteilchen-Greenfunktion aus (2.1.20) des vorausgegangenen Abschnitts die sog. Dysongleichung

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_1^{\,2}} + \mu\right) G^{(1)}_{\eta_1\eta_1'}(\vec{r}_1 t_1;\vec{r}_1' t_1') = \qquad 2.3.5$$

$$\sum_{\tilde{\eta}_1} \int d^3\tilde{r}_1 \int d\tilde{t}_1 \quad \Sigma_{\eta_1\tilde{\eta}_1}(\vec{r}_1 t_1;\vec{\tilde{r}}_1 \tilde{t}_1)\, G^{(1)}_{\tilde{\eta}_1\eta_1'}(\vec{\tilde{r}}_1\tilde{t}_1;\vec{r}_1' t_1') + \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_1')\,\delta(t_1-t_1')\,\delta_{\eta_1\eta_1'} .$$

An dieser Stelle wollen wir zu den fouriertransformierten Größen übergehen. Dazu sei $\varphi(1\ldots n;1'\ldots n')$ eine Funktion der Variablen $1\ldots n;1'\ldots n'$ ($\varphi(1\ldots n;1'\ldots n') \equiv \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_1' \ldots \alpha_{n'}}(t_1\ldots t_n; t_{1'}\ldots t_{n'})$). Für die Fouriertransformierten treffen wir die folgende Konvention

$$\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\alpha_1'\ldots\alpha_{n'}}(t_1\ldots t_n;t_1'\ldots t_{n'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+n'}\int d\varepsilon_1\ldots d\varepsilon_n\, d\varepsilon_1'\ldots d\varepsilon_{n'} \qquad 2.3.6$$

$$e^{-i\varepsilon_1 t_1 \ldots -i\varepsilon_n t_n}\; e^{i\varepsilon_1' t_1' \ldots i\varepsilon_{n'} t_{n'}}$$

$$\bar{\varphi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\alpha_1'\ldots\alpha_{n'}}(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n;\varepsilon_1'\ldots\varepsilon_{n'})$$

mit der inversen Transformation

$$\bar{\varphi}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\alpha_1'\ldots\alpha_{n'}}(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n,\varepsilon_1'\ldots\varepsilon_{n'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+n'}\int dt_1\ldots dt_n\, dt_1'\ldots dt_{n'} \qquad 2.3.7$$

$$e^{i\varepsilon_1 t_1 \ldots +i\varepsilon_n t_n}\; e^{-i\varepsilon_1' t_1' \ldots -i\varepsilon_{n'} t_{n'}}$$

$$\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\alpha_1'\ldots\alpha_{n'}}(t_1\ldots t_n;t_1'\ldots t_{n'}).$$

Für ortsabhängige Funktionen vereinbaren wir bei Transformation (Rücktransformation) in den Impulsraum (Ortsraum)

$$\varphi_{\eta_1\ldots\eta_n;\eta_1'\ldots\eta_{n'}}(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_n;\vec{r}_1'\ldots\vec{r}_{n'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{3(n+n')}\int d^3\vec{p}_1\ldots d^3\vec{p}_n\, d^3\vec{p}_1'\ldots d^3\vec{p}_{n'} \qquad 2.3.8$$

$$e^{i\sum_{j=1}^{n}(\vec{p}_j\cdot\vec{r}_j - \vec{p}_j'\cdot\vec{r}_j')}\;\bar{\varphi}_{\eta_1\ldots\eta_n;\eta_1'\ldots\eta_{n'}}(\vec{p}_1\ldots\vec{p}_n,\vec{p}_1'\ldots\vec{p}_{n'})$$

und

$$\bar{\varphi}_{\eta_1\ldots\eta_n;\eta_1'\ldots\eta_{n'}}(\vec{p}_1\ldots\vec{p}_n;\vec{p}_1'\ldots\vec{p}_{n'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{3(n+n')}\int d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_n\, d^3\vec{r}_1'\ldots d^3\vec{r}_{n'} \qquad 2.3.9$$

$$e^{-i\sum_{j=1}^{n}(\vec{p}_j\vec{r}_j - \vec{p}_j'\vec{r}_j')}\;\varphi_{\eta_1\ldots\eta_n;\eta_1'\ldots\eta_{n'}}(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_n,\vec{r}_1'\ldots\vec{r}_{n'}).$$

Wegen der Translationsinvarianz der Kernmaterie in den Zeit- und Ortsvariablen sind der Massenoperator $\Sigma_{\eta_1\eta_1'}(\vec{r}_1 t_1;\vec{r}_1{}' t_1')$ und die Zweipunktfunktion $G^{(1)}_{\eta_1\eta_1'}(\vec{r}_1 t_1;\vec{r}_1{}' t_1')$ Funktionen der Zeitdifferenzen t_1-t_1' bzw. der Relativabstände $\vec{r}_1-\vec{r}_1{}'$. Dies hat zur Folge, daß diese Größen sowohl im Energie- als auch im Impulsraum je eine Deltafunktion abspalten, die gerade der Energie- bzw. der Impulserhaltung Rechnung trägt.

Mithin schreiben wir für die Zweipunktfunktion(*)

$$G^{(1)}_{\eta_1\eta_1'}(\vec{p}_1\varepsilon_1;\vec{p}_1{}'\varepsilon_1') = \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')\,\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_1')\,\delta_{\eta_1\eta_1'}\,G^{(1)}_{\eta_1\eta_1}(\vec{p}_1;\varepsilon_1) \qquad 2.3.10$$

und für den Massenoperator

$$\Sigma_{\eta_1\eta_1'}(\vec{p}_1\varepsilon_1;\vec{p}_1{}'\varepsilon_1') = \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')\,\delta(\varepsilon_1-\varepsilon_1')\,\delta_{\eta_1\eta_1'}\,\Sigma_{\eta_1\eta_1}(\vec{p}_1;\varepsilon_1)\,. \qquad 2.3.11$$

Mit diesen Vereinbarungen findet man für die fouriertransformierte Dysongleichung (2.3.5) in Kernmaterie

$$\left(\varepsilon-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+\mu-\Sigma_\eta(\vec{p};\varepsilon)\right)\,G^{(1)}_\eta(\vec{p};\varepsilon)=1\,. \qquad 2.3.12$$

Die Bezeichnung Selbstenergie für Σ wird verständlich durch Vergleich von Gleichung (2.3.12) mit der Fouriertransformierten von (2.1.21).

(*) Der Spin (Isospin) hat für Kernmaterie im Grundzustand den Wert null. Daraus folgt, daß die Einteilchen-Greenfunktion diagonal in den Spin- Isospinindizes η_1, η_1' ist.

Der Vergleich von (2.3.1) mit (2.3.2) zeigt, daß in allen angegebenen Näherungen das effektive Einteilchen- über das effektive Zweiteilchenpotential und die Zweipunktfunktion ausgedrückt werden kann:

$$\langle 1 | \Sigma^{(ii)} | 1' \rangle = i \langle 12 | T^{(ii)} | 1'2' \rangle \, G^{(1)}(2'; 2^+) . \qquad 2.3.14$$

Um die Gleichgewichtsdichte und die Bindungsenergie pro Nukleon in Kernmaterie zu berechnen, muß die Zweipunktfunktion $G^{(1)}$ aus der Dysongleichung (2.3.12) bestimmt werden. Die T-Matrix ist dabei Lösung einer der Integralgleichungen (2.3.3). Zur Lösung des Problems gehen wir auch hier zu den Energievariablen über. Zunächst nutzen wir aus, daß die Wechselwirkung $V^{(a)}$ gemäß (2.1.19) instantan wirkt: $V^{(a)}_{121'2'} = \frac{1}{2} \delta(t_1 - t_2) \, \delta(t_1' - t_2') \, \delta(t_2 - t_1') \left\{ V_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'} - V_{\alpha_1\alpha_2\alpha_2'\alpha_1'} \right\}$.

Für die fouriertransformierte Wechselwirkung gilt daher

$$V^{(a)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 ; \varepsilon_1' \varepsilon_2') = (2\pi)^{-1} \, \delta(E - E') \, V^{(a)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'} \qquad 2.3.15$$

mit $\quad E := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \, , \quad E' := \varepsilon_1' + \varepsilon_2' . \qquad 2.3.16$

Aus (2.3.3) folgt dann für die T-Matrix die Beziehung

$$T^{(ii)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 , \varepsilon_1' \varepsilon_2') = (2\pi)^{-1} \, \delta(E - E') \, T^{(ii)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'} (E) . \qquad 2.3.17$$

2.4 Funktionalmethode und Leiternäherungen der irreduziblen Teilchen-Loch-Wechselwirkung I und der Streuamplitude Γ.

Im Abschnitt 2 dieses Kapitels haben wir auf der Grundlage physikalischer Argumente bezüglich der Reichweite der Kernkräfte und des mittleren Teilchenabstandes (Dichte) der Kernmaterie das System der Greenschen Funktionen durch eine Faktorisierung der Sechspunktfunktion $G^{(3)}$, die dynamische Korrelationen zwischen den beiden streuenden Nukleonen berücksichtigt, auf die Berechnung der Vierpunktfunktion $G^{(2)}$ reduziert.
Einen anderen Zugang zu den Gleichungen der Abschnitte 2.2 und 2.3, insbesondere zu den Näherungen zur Berechnung der T-Matrix via "Linearisierung" (Vernachlässigung von Feynmangraphen), liefert die sog. Funktionalmethode, die auf Baym und Kadanoff (BK61, BK62) und Brenig und Wagner (BW63) beruht.

Wir betrachten dazu ein schwaches, zeitabhängiges äußeres Feld Q (WW71,SCH76), so daß das Funktional von $Q^{(*)}$

$$G^{(1)}(1;1') = -i \langle \phi_0 | T \psi(1) \psi^+(1') e^{iU} | \phi_0 \rangle (\langle \phi_0 | T e^{iU} | \phi_0 \rangle)^{-1}, \qquad 2.4.1$$

$$U = \langle 2 | Q | 2' \rangle \psi(2) \psi^+(2') \qquad 2.4.2$$

als Reihe im Sinne der Störungstheorie definiert ist (SW61).
$G^{(1)}(1;1')$ ist die Zweipunktfunktion für das Fermionensystem im äußeren Feld Q. Dies läßt sich zeigen, indem man den Schrödinger-

---

(*) $|\phi_0\rangle$ ist der Grundzustand des Systems ohne äußere Störung.

operator von (2.1.23) auf $G^{(1)}$ anwendet,

$$-\left(\langle 1|S|1''\rangle + \langle 1|Q|1''\rangle\right) G^{(1)}(1'';1') + i\langle 12|V^{(0)}|1''2'\rangle \qquad 2.4.3$$

$$G^{(2)}(1''2'^{+};1'2^{++}) = \delta(1-1'),$$

wobei 2.4.4

$$G^{(2)}(12;1'2') = (-i)^2 \langle\phi_0|T\psi(1)\psi(2)\psi^{+}(2')\psi^{+}(1')\, e^{iU}|\phi_0\rangle \left(\langle\phi_0|T\, e^{iU}|\phi_0\rangle\right)^{-1}.$$

Die Reaktion L des Systems in erster Ordnung auf eine äußere Störung ergibt sich zu

$$L(12;1'2') := i\,\frac{\delta G^{(1)}(1,1')}{\delta\langle 2'|Q|2\rangle} = -i\, G^{(2)}(12;1'2') + i\, G^{(1)}(1;1')\, G^{(1)}(2;2'). \qquad 2.4.5$$

Für den Grenzfall $Q \to 0$ trägt L den Namen lineare Antwortfunktion (WW71). Zweckmäßigerweise definiert man den unkorrelierten Teil von L durch

$$L^{0}(12;1'2') := i\, G^{(1)}(1,2')\, G^{(1)}(2;1'). \qquad 2.4.6$$

Mit der Gleichung für den Massenoperator von (2.3.1)
$\Sigma(1;1'')\, G^{(1)}(1'';1') = -i\langle 12|V^{(0)}|1''2'\rangle\, G^{(2)}(1''2'^{+};1'2^{++})$ wird die Herleitung einer Bewegungsgleichung für die lineare Antwortfunktion ermöglicht.

Zunächst folgt damit aus Gleichung (2.4.3) die Dysongleichung

$$-\langle 1|S+Q+\Sigma|1''\rangle\, G^{(1)}(1'';1') = \delta(1-1'), \qquad 2.4.7$$

woran durch Funktionalableitung nach dem äußeren Feld Q sich die Gleichung (BK61)

$$\frac{\delta G^{(1)}(1;1')}{\delta\langle 2'|Q|2\rangle} = G^{(1)}(1;2')\, G^{(1)}(2;1') + G^{(1)}(1;3)\,\frac{\delta\langle 3|\Sigma|3'\rangle}{\delta\langle 2'|Q|2\rangle}\, G^{(1)}(3';1') \qquad 2.4.8$$

anschließt. Durch Einsetzen von (2.4.5), der Definitionsgleichung

(2.3.1) (s. oben) und Gleichung (2.4.7) geht (2.4.8) über in

$$\langle 1|\Sigma|1'\rangle = -2i\,\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle\; G^{(1)}(2';2) + i\,\langle 12'|V^{(a)}|32\rangle \qquad 2.4.9$$

$$G^{(1)}(3;3')\;\frac{\partial\langle 2'|\Sigma|1'\rangle}{\partial\langle 2'|Q|2\rangle}\;.$$

Die Iteration der Gleichungen (2.4.9) und (2.4.8) liefert eine Reihe für die Selbstenergie Σ, die nur von $V^{(a)}$, $G^{(1)}$ und Funktio ableitungen der Greenschen Funktion $G^{(1)}$ abhängt, so daß Σ nur über $G^{(1)}$ eine Funktion von Q ist:

$$\frac{\partial\langle 1|\Sigma|1'\rangle}{\partial\langle 2'|Q|2\rangle} = \frac{\partial\langle 1|\Sigma|1'\rangle}{\partial G^{(1)}(3';3)}\;\frac{\partial G^{(1)}(3';3)}{\partial\langle 2'|Q|2\rangle}\;. \qquad 2.4.10$$

Im nächsten Schritt führen wir die irreduzible Teilchen-Loch-Wechselwirkung ein. Diese erhalten wir durch Ableitung des Massenoperators nach der Zweipunktfunktion im Limes $Q\to 0$ und soll mit I(12;1'2') bezeichnet werden:

$$\langle 12|I|1'2'\rangle \equiv I(12;1'2') := i\,\frac{\partial\langle 1|\Sigma|1'\rangle}{\partial G^{(1)}(2';2)}\;. \qquad 2.4.11$$

Die Größe I entspricht physikalisch einer effektiven Teilchen-Loch-Wechselwirkung.

Einsetzen der Gleichung (2.4.10), der Definitionen (2.4.5), (2.4.6) und (2.4.11) ergibt eine Bethe-Salpeter-Gleichung

$$\langle 12|L|1'2'\rangle = \langle 12|L^{\circ}|1'2'\rangle - \langle 13|L^{\circ}|1'3'\rangle\langle 3'4'|I|34\rangle\langle 42|L|4'2'\rangle\;. \qquad 2.4.12$$

Führen wir die Definition von I in Gleichung (2.4.9) ein, so folgt

$$\langle 1|\Sigma|1'\rangle = -2i\,\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle\; G^{(1)}(2';2) \qquad 2.4.13$$

$$-i\,\langle 12'|V^{(a)}|32\rangle\; G^{(1)}(3\,3')\,\langle 3'4',I|1'4\rangle\langle 42\,L|4'2'\rangle\;.$$

die im Prinzip durch Ableitung nach $G^{(1)}$ die Herleitung einer Gleichung für I ermöglicht. Diese enthält die Ableitung von L nach $G^{(1)}$, die aus der Bethe-Salpeter-Gleichung (2.4.12) berechnet werden kann. Dazu bietet sich an, Gleichung (2.4.12) in der Form

$$\langle 12|L|1'2'\rangle = \langle 12|L^{\circ}|1'2'\rangle - \langle 13|L^{\circ}|1'3'\rangle\langle 3'4'|\Gamma|34\rangle\langle 42|L^{\circ}|4'2'\rangle \qquad 2.4.14$$

zu schreiben. Offensichtlich genügt die Größe Γ der Integralgleichung

$$\langle 12|\Gamma|1'2'\rangle = \langle 12|I|1'2'\rangle - \langle 13|I|1'3'\rangle\langle 3'4'|L^{\circ}|34\rangle\langle 42|\Gamma|4'2'\rangle, \qquad 2.4.15$$

wie man durch Vergleich der iterierten Gleichungen (2.4.12) und (2.4.14) sieht. Der Massenoperator von (2.4.13) kann in Abhängigkeit der Streuamplitude Γ ausgedrückt werden:

$$\langle 1|\Sigma|1'\rangle = -2i\,\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle\, G^{(1)}(2';2) \qquad 2.4.16$$

$$- i\,\langle 12'|V^{(a)}|32\rangle\, G^{(1)}(3;3')\,\langle 3'4'|\Gamma|1'4\rangle\langle 42|L^{\circ}|4'2'\rangle$$

$$= -2i\,\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle\, G^{(1)}(2';2) \qquad 2.4.17$$

$$+ i\,\langle 12'|V^{(a)}|32\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;2')\, G^{(1)}(2;4')\langle 3'4'|\Gamma|1'4\rangle.$$

Indem wir diese Gleichung nach $G^{(1)}$ ableiten, erhalten wir eine weitere, die Größen I und Γ verknüpfende Relation

$$\langle 12|I|1'2'\rangle = 2\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle + i\langle 12|V^{(a)}|34\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\langle 3'4'|\Gamma|1'2'\rangle \qquad 2.4.18$$

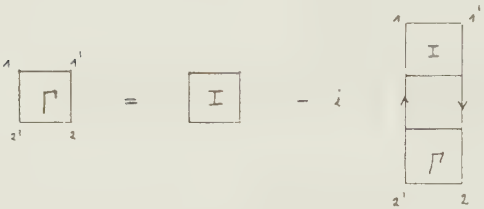
$$+ i\,\langle 14'|V^{(a)}|32'\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4)\langle 3'2|\Gamma|1'4\rangle$$

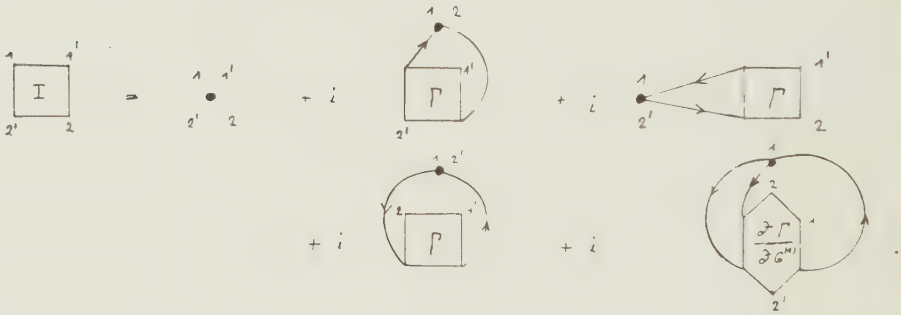
$$+ i\,\langle 13'|V^{(a)}|2'4\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4,4')\langle 24'|\Gamma|1'3\rangle$$

$$+ i\,\langle 14'|V^{(a)}|35\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\frac{\partial\langle 35'|\Gamma|1'4\rangle}{\partial G^{(1)}(2';2)},$$

die es uns ermöglicht, durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (2.4.15) zu einer Gleichung für die Γ-Matrix zu gelangen, die nur von Γ und der Funktionalableitung $\frac{\partial \Gamma}{\partial G^{(a)}}$ abhängt.

Die Gleichungen (2.4.15) und (2.4.18) lassen sich mit Feynmangraphen schreiben(*)





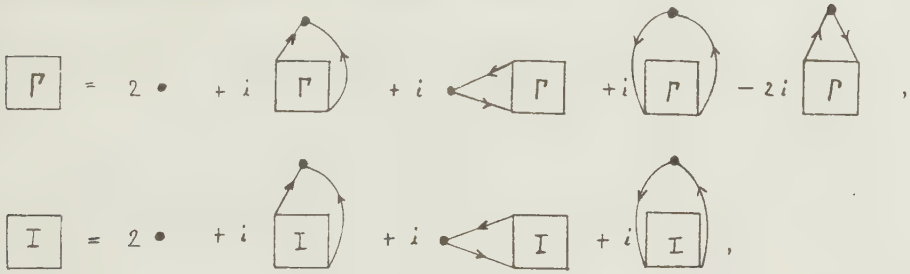
Wie man sieht, kann kein Graph, der zu I beiträgt, durch einen Schnitt einer Teilchen-Loch-Linie zwischen den Punktepaaren (1;2') und (1';2) getrennt werden. I wird deshalb die irreduzible Teilchen Loch-Wechselwirkung genannt. Die Γ-Streumatrix dagegen ist reduzibel und besteht gerade aus den Graphen, die durch Verkettung der Größen I untereinander mit je einer Teilchen-Loch-Linie entstehen.

Die Entkopplung der Gleichungssysteme (2.4.15) und (2.4.18)

(*) Der Größe $\langle 12|A|1'2'\rangle$ soll der Graph zugeordnet sein. Die antisymmetrisierte instantane Wechselwirkung $V^{(a)}$ sei durch einen Punkt • gekennzeichnet. ↑ , ↓ steht für die Zweipunktfunktion (Teilchen-, Lochpropagation).

erhält man durch Vernachlässigung von $\frac{\partial \Gamma}{\partial G^{(1)}}$ plus aller Terme, in denen I oder Γ quadratisch vorkommen (lineare Näherung).

Die Feynmangraphen hierzu haben die Form



denen die Gleichungen

2.4.19

$$\begin{aligned}\langle 12|\Gamma|1'2'\rangle = {} & 2\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle + i\langle 12|V^{(a)}|34\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 3'4'|\Gamma|1'2'\rangle \\ & + i\langle 14'|V^{(a)}|32'\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 3'2|\Gamma|1'4\rangle \\ & + i\langle 13'|V^{(a)}|2'4\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 24'|\Gamma|1'3\rangle \\ & - 2i\langle 14'|V^{(a)}|1'3\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 3'2|\Gamma|42'\rangle\end{aligned}$$

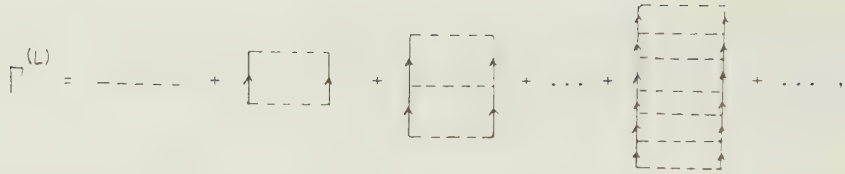
und

2.4.20

$$\begin{aligned}\langle 12|I|1'2'\rangle = {} & 2\langle 12|V^{(a)}|1'2'\rangle + i\langle 12|V^{(a)}|34\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 3'4'|I|1'2'\rangle \\ & + i\langle 14'|V^{(a)}|32'\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 3'2|I|1'4\rangle \\ & + i\langle 13'|V^{(a)}|2'4\rangle\, G^{(1)}(3;3')\, G^{(1)}(4;4')\,\langle 24'|I|1'3\rangle\end{aligned}$$

entsprechen.

Die zweiten Summanden in den Gleichungen (2.4.19) und (2.4.20) summieren die Leitergraphen ($V^{(a)}$ = - - - - -),



während die Beschränkung auf die ersten Terme die (statische) Hartree-Fock-Näherung liefert. Der letzte Summand in (2.4.19) summiert die sogenannten Blasengraphen, die dritten- und vierten Summanden in (2.4.19) und (2.4.20) stellen Austauschterme zu den Blasengraphen dar. In dem für uns wichtigen Fall der Leiternäherung ($\Gamma \to \Gamma^{(L)}, I \to I^{(L)}$) sind Γ und I identisch und genügen der Integralgleichung

$$\langle 12|\Gamma^{(L)}|1'2'\rangle = 2\langle 12|V^{(0)}|1'2'\rangle + i\langle 12|V^{(0)}|34\rangle G^{(1)}(3,3')\, G^{(1)}(4,4')\langle 3'4'|\Gamma^{(L)}|1'2'\rangle \qquad 2.4.21$$

(m.m. für $I^{(L)}$).

Wie ein Vergleich von (2.4.21) mit den Integralgleichungen (2.3.3) der T-Matrix in den $\Lambda^{(ij)}$-Näherungen zeigt, stimmt die $T^{(11)}$-Matrix mit der Streuamplitude Γ in der Leiternäherung überein.

2.5 Fouriertransformation der Zweipunktfunktion und Spektraldarstellung.

In Kernmaterie ist wegen der räumlichen- und zeitlichen Translationsinvarianz des Systems die Energie- Impulsdarstellung vorteilhaft. Die relevanten Funktionen spalten in dieser Darstellung jeweils eine Deltafunktion ab, und man erhält hieraus, bei Berücksichtigung der Diagonalität von $G^{(1)}$ in den Spin- (Isospin) Variablen, die Polstellen und Residuen der Zweipunktfunktion, die eine direkte physikalische Bedeutung (z.B. Einteilchenstärken, Anregungsenergien des N-Nukleonensystems) haben. Wir wollen die Transformation der $G^{(1)}$

-Funktion genauer betrachten. Zu diesem Zweck gehen wir von der Definitionsgleichung (2.1.14), die für Kernmaterie diagonal in den Impuls-, Spin- und Isospinindizes ist, aus ($\vec{k}:=(\vec{k}_1+\vec{k}_1')/2$, $\tau:=t_1-t_1'$):

$$G^{(1)}_{\eta\eta'}(\vec{k}_1 t_1;\vec{k}_1' t_1') = \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_1')\,\delta_{\eta\eta'}\,G^{(1)}_{\eta\eta}\left(\frac{\vec{k}_1+\vec{k}_1'}{2};\, t_1-t_1'\right) \qquad 2.5.1$$

mit(*)

$$i\,G^{(1)}_{\eta\eta}(\vec{k};\tau) = \langle\phi_0|\,\psi_\eta(\vec{k})\,e^{i(-H+E_0)\tau-0|\tau|}\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle \qquad 2.5.2$$
$$-\langle\phi_0|\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,e^{i(H-E_0)\tau-0|\tau|}\,\psi_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle .$$

Im Energieraum erhalten wir

$$G^{(1)}_{\eta\eta}(\vec{k};\varepsilon) = \langle\phi_0|\,\psi_\eta(\vec{k})\,(\varepsilon-H+E_0+i0)^{-1}\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle \qquad 2.5.3$$
$$+\langle\phi_0|\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,(\varepsilon+H-E_0-i0)^{-1}\,\psi_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle .$$

Im Limes großer Teilchenzahlen ist es von Vorteil, den umgeeichten Hamiltonoperator aus (2.1.16) zu verwenden. Gleichung (2.5.3) geht dann über in

$$G^{(1)}_{\eta\eta}(\vec{k};\varepsilon) = \langle\phi_0|\,\psi_\eta(\vec{k})\,(\varepsilon-H+\mu+E_0(N)+i0)^{-1}\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle \qquad 2.5.4$$
$$+\langle\phi_0|\,\psi^+_\eta(\vec{k})\,(\varepsilon+H+\mu-E_0(N)-i0)^{-1}\,\psi_\eta(\vec{k})\,|\phi_0\rangle .$$

Durch Einschieben eines vollständigen Systems von Zuständen des (N+1)- und (N-1)-Systems erhalten wir die sog. Spektraldarstellung der Zweipunktfunktion ($\gamma=(\vec{k};\eta)$)(**)

$$\mathbb{1} = \sum_{|\Omega_\beta\rangle} |\Omega_\beta\rangle\langle\Omega_\beta| \quad , \qquad \mathbb{1} = \sum_{|\Lambda_\alpha\rangle} |\Lambda_\alpha\rangle\langle\Lambda_\alpha| \, , \qquad 2.5.5$$

(*) Die Grundzustandsenergie des N-Teilchensystems $E_0=E_0(N)$ wurde in (2.1.17) eingeführt.

(**) Mit $E^\beta_\alpha(N\pm1)$ bezeichnen wir die Anregungsenergien des (N±1)-Nukleonensystems: $H|\Omega_\beta\rangle=E_\beta(N+1)|\Omega_\beta\rangle$, $H|\Lambda_\alpha\rangle=E_\alpha(N-1)|\Lambda_\alpha\rangle$.

$$G_{\gamma}^{(1)}(\varepsilon) = \sum_{|\Omega_\beta\rangle} \frac{\langle \phi_0 | \psi_\gamma | \Omega_\beta \rangle \langle \Omega_\beta | \psi_\gamma^+ | \phi_0 \rangle}{\varepsilon - E_\beta(N+1) + E_0(N) + i0} \qquad 2.5.6$$

$$+ \sum_{|\Lambda_\alpha\rangle} \frac{\langle \phi_0 | \psi_\gamma^+ | \Lambda_\alpha \rangle \langle \Lambda_\alpha | \psi_\gamma | \phi_0 \rangle}{\varepsilon + E_\alpha(N-1) - E_0(N) - i0} \quad .$$

Die Pole der Zweipunktfunktion $G^{(1)}$ im Energieraum liegen gerade bei den Separationsenergien des $(N\pm1)$-Teilchensystems.
Die Residuen geben die Einteilchenstärken der entsprechenden Zustände an.
Die Energiedifferenz $E_\beta(N+1)-E_0(N)$ besteht aus zwei Anteilen:
Der Energie, die nötig ist, um vom Grundzustand $E_0(N)$ zum Grundzustand des $(N+1)$-Teilchensystems zu gelangen und der Energie, die zur Anregung des $(N+1)$-Systems vom $E_0(N+1)$-Grundzustand in den angeregten Zustand $|\Omega_\beta\rangle$ mit $E_\beta(N+1)$ aufzuwenden ist. Zu diesem Zweck definieren wir

$$\Delta E \equiv E_\beta(N+1)-E_0(N) = (E_0(N+1)-E_0(N)) + (E_\beta(N+1)-E_0(N+1)) \qquad 2.5.7$$
$$\equiv \mu + \varepsilon_\beta \quad ^{(*)} .$$

Entsprechend gilt

$$\Delta\tilde{E} = E_\alpha(N-1)-E_0(N) = -\mu + \varepsilon_\alpha \quad . \qquad 2.5.8$$

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir noch eine andere Interpretation von Ausdruck (2.5.6) an. Dazu schreiben wir (2.5.6) mittels (2.5.8) in der Form

---

(*) Zur Definition des chemischen Potentials μ siehe (2.1.17).

$$G_\gamma^{(1)}(\varepsilon) = \sum_{|\Omega_\beta\rangle} \frac{\langle\phi_0|\psi_\gamma|\Omega_\beta\rangle\langle\Omega_\beta|\psi_\gamma^+|\phi_0\rangle}{\varepsilon - \varepsilon_\beta - \mu + i0} + \sum_{|\Lambda_\alpha\rangle} \frac{\langle\phi_0|\psi_\gamma^+|\Lambda_\alpha\rangle\langle\Lambda_\alpha|\psi_\gamma|\phi_0\rangle}{\varepsilon + \varepsilon_\alpha - \mu - i0} . \qquad 2.5.9$$

Wie man sieht, liegen die Singularitäten von $G_\gamma^{(1)}(\varepsilon)=G_\eta^{(1)}(\vec{k};\varepsilon)$ in unserer Einteilchenbasis $(\vec{k};\sigma,\tau)$ bei den um μ reskalierten Anregungsenergien ε_α, ε_β des $(N\pm1)$-Teilchensystems, die in einem Einteilchenmodell gleich den Einteilchenenergien sind. Die Summationen über $|\Omega_\beta\rangle$ und $|\Lambda_\alpha\rangle$ laufen über alle (entarteten) Zustände mit den Anregungsenergien ε_α, ε_β. Da in Kernmaterie das Energiespektrum kontinuierlich ist, kann die Summation durch eine Integration ersetzt werden. Dazu führen wir in beiden Summanden von (2.5.9) eine gemeinsame Summationsvariable n mit entsprechenden Anregungsenergien ε_n' ein. Ferner unterwerfen wir die Anregungsenergie der Beschränkung, in einem infinitesimalen Intervall $(\varepsilon'<\varepsilon_n'<\varepsilon'+d\varepsilon')$ zu liegen und definieren die Spektralfunktionen $A_\gamma^{(\pm)}(\varepsilon')$ durch (MI57,LU61,SC64,KI67, FW71)

$$A_\gamma^{(+)}(\varepsilon')\,d\varepsilon' = \sum_n |\langle n|\psi_\gamma^+|\phi_0\rangle|^2 \qquad \forall\ \varepsilon' < \varepsilon_n' < \varepsilon'+d\varepsilon', \qquad 2.5.10$$

$$A_\gamma^{(-)}(\varepsilon')\,d\varepsilon' := \sum_n |\langle n|\psi_\gamma|\phi_0\rangle|^2 \qquad \forall\ \varepsilon' < \varepsilon_n' < \varepsilon'+d\varepsilon'. \qquad 2.5.10'$$

Die Funktionen $A_\gamma^{(\pm)}(\varepsilon')$ sind mithin ein Maß für die Dichte der Zustände des Teilchensystems. Physikalisch gibt $A_\gamma^{(\pm)}(\varepsilon')d\varepsilon'$ die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zustand $\psi_\gamma^+|\phi_0\rangle$ eine Anregungsenergie besitzt, die im Intervall $(\varepsilon',\varepsilon'+d\varepsilon')$ liegt (Einteilchenstärke).

Die Beziehungen (2.5.10-10') schreiben wir zweckmäßigerweise in

$$A_\gamma^{(+)}(\varepsilon') = \sum_n \delta(\varepsilon' - \Delta E + \mu)\, |\langle n | \Psi_\gamma^+ | \phi_0 \rangle|^2 , \qquad 2.5.11$$

$$A_\gamma^{(-)}(\varepsilon') = \sum_n \delta(\varepsilon' - \Delta \tilde{E} - \mu)\, |\langle n | \Psi_\gamma | \phi_0 \rangle|^2 \qquad 2.5.11'$$

um.

Von der Summation über n gelangen wir zur Integration über die Variable ε' mit Hilfe der allgemeinen Relation (KI67)

$$\sum_n |\langle n| \begin{Bmatrix} \Psi_\gamma^+ \\ \Psi_\gamma \end{Bmatrix} |\phi_0\rangle|^2 \; X(\varepsilon'_n) = \int d\varepsilon' \, A_\gamma^{(\pm)}(\varepsilon') \; X(\varepsilon') , \qquad 2.5.12$$

wobei X eine beliebige Funktion sein kann.

Damit geht die Zweipunktfunktion von (2.5.9) schließlich über in die sog. Lehmannsche Spektraldarstellung der $G^{(1)}$-Funktion

$$G_\gamma^{(+)}(\varepsilon) \equiv G_\gamma^{(+)}(\vec{k};\varepsilon) = \int_0^\infty d\varepsilon' \left(\frac{A^{(+)}(\vec{k};\varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon' - \mu + i0} + \frac{A^{(-)}(\vec{k};\varepsilon')}{\varepsilon + \varepsilon' - \mu - i0} \right) . \qquad 2.5.13$$

3. Analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene.

Durch analytische Fortsetzung der Zweipunktfunktion $G^{(1)}(\varepsilon)$ in die komplexe Energieebene lassen sich wichtige Zusammenhänge herleiten, die eine kompakte Formulierung der Kernmateriegleichungen gestatten (PRW66,WW71). Von wesentlicher Bedeutung ist dabei die Darstellung der Zweipunktfunktion $G^{(1)}(z)$ über ihre Spektraldarstellung.
Die "physikalischen" Größen (reelle Argumente) wie $G_\gamma^{(1)}(\varepsilon)$, $\Sigma_\gamma(\varepsilon)$ und $\Lambda_\gamma(\varepsilon)$ erhalten wir durch entsprechende Randwertbildungen der analytisch fortgesetzten Funktionen an die reelle Energieachse. Wir beginnen zunächst mit der bekannten Zweipunktfunktion und der Dysongleichung aus Abschnitt 2.3.

3.1 Eigenschaften der Zweipunktfunktion und der Dysongleichung.

Sofern nicht anderst erwähnt, benutzen wir die oben eingeführte Diagonalbasis $(\vec{k};\sigma,\tau)\equiv\gamma$. Für spätere Umformungen geben wir die folgenden Relationen an (P bezeichnet den Cauchyschen Hauptwert (KI67)):

$$P\,\frac{1}{\omega} = (\omega \pm i0)^{-1} \pm i\pi\,\delta(\omega)\,, \qquad 3.1.1$$

$$P\,\frac{1}{\varphi(\omega)} = (\varphi(\omega) \pm i0)^{-1} \pm i\pi\,\delta(\varphi(\omega))\,, \qquad 3.1.2$$

so daß

$$(\omega+i0)^{-1} - (\omega-i0)^{-1} = -2\pi i\,\delta(\omega) \qquad 3.1.3$$

gilt.
Damit kann der Imaginärteil von (2.5.4) auf die Form (s. Anhang A.7)

$$\pi_\gamma^{(G^{(1)})}(\varepsilon) = -\pi \langle \phi_0 | \psi_\gamma \, \delta(\varepsilon+\mu-H+E_0) \, \psi_\gamma^+ | \phi_0 \rangle \quad \theta(\varepsilon)$$

$$+\pi \langle \phi_0 | \psi_\gamma^+ \, \delta(\varepsilon+\mu+H-E_0) \, \psi_\gamma | \phi_0 \rangle \quad \theta(-\varepsilon) \qquad 3.1.4$$

gebracht werden.

Führen wir die Spektralfunktion $A_\gamma(\varepsilon)$ durch

$$A_\gamma(\varepsilon) := \frac{1}{\pi}\left(-\pi_\gamma^{(G^{(1)})}(\varepsilon) \quad \theta(\varepsilon) + \pi_\gamma^{(G^{(1)})}(\varepsilon) \quad \theta(-\varepsilon)\right) \equiv A_\gamma^{(+)}(\varepsilon) + A_\gamma^{(-)}(\varepsilon) \qquad 3.1.5$$

ein, erhält man die Zweipunktfunktion in der Form (MI57) (vgl. (2.5.13))

$$G_\gamma^{(1)}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{0} \frac{A_\gamma(\varepsilon')}{\varepsilon-\varepsilon'-i0} \, d\varepsilon' + \int_{0}^{\infty} \frac{A_\gamma(\varepsilon')}{\varepsilon-\varepsilon'+i0} \, d\varepsilon' . \qquad 3.1.6$$

Indem wir in $A_\gamma^{(\pm)}(\varepsilon)$ mittels $\pi_\gamma^{(G^{(1)})}$ aus (3.1.4) durch Einschieben der $\mathbb{1}$ -Operatoren von (2.5.5) umformen, können wir uns davon überzeugen, daß $A_\gamma(\varepsilon)$ aus (3.1.5) mit den obigen Definitionen (2.5.10-10') konsistent ist. Die Einteilchen-Greenfunktionen aus (2.5.4) bzw. (2.5.6) lassen sich durch Einsetzen von $A_\gamma(\varepsilon)$ in (3.1.6) verifizieren. Anhand der Definitionen (2.5.10-10') sehen wir ferner, daß die Spektralfunktion $A_\gamma(\varepsilon)$ positiv definit ist:

$$A_\gamma(\varepsilon) > 0 . \qquad 3.1.7$$

Diese erfüllt außerdem die Summenregel

$$1 = \int d\varepsilon A_\gamma(\varepsilon) = \int d\varepsilon \langle \phi_0 | \left\{ \psi_\gamma \, \delta(\varepsilon-H+E_0(N)+\mu) \, \psi_\gamma^+ + \psi_\gamma^+ \, \delta(\varepsilon+H-E_0(N)+\mu) \, \psi_\gamma \right\} | \phi_0 \rangle , \qquad 3.1.8$$

was unmittelbar durch Einsetzen der Beziehungen (3.1.5) und (3.1.4) in (3.1.8) und Benutzung der Kommutatorrelationen (2.1.1) verifiziert werden kann.

Die analytische Zweipunktfunktion definieren wir gemäß (KI67,FW71, WW71) durch(*)

$$\tilde{G}_\gamma^{(1)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\gamma(\varepsilon')}{z-\varepsilon'}\, d\varepsilon' \qquad \forall\ \pi^{(z)} \neq 0 \,. \tag{3.1.9}$$

Damit gilt die Relation $\tilde{G}_\gamma^{(1)}(z^*) = \tilde{G}_\gamma^{(1)*}(z)$. 3.1.10

Die Funktion $\tilde{G}_\gamma^{(1)}(z)$ ist Lösung der analytisch fortgesetzten Dysongleichung (vgl. (2.3.12)(**)

$$\tilde{G}_\gamma^{(1)}(z) = \left(z - h_\gamma + \mu - \tilde{\Sigma}_\gamma(z)\right)^{-1} . \tag{3.1.11}$$

Die "physikalische" Zweipunktfunktion $G_\gamma^{(1)}(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ ist damit durch Randwertbildung an die reelle Achse gegeben

$$G_\gamma^{(1)}(\varepsilon) = \lim_{\nu \to 0} \left(\theta(\varepsilon)\, \tilde{G}_\gamma^{(1)}(\varepsilon + i\nu) + \theta(-\varepsilon)\, \tilde{G}_\gamma^{(1)}(\varepsilon - i\nu) \right) . \tag{3.1.12}$$

Zum Beweis betrachte man (3.1.6) und (3.1.9). Analoge Beziehungen gelten für die Selbstenergie Σ und die T-Matrix (s. unten). Die Gesamtenergie <H> von (2.1.28) und die Dichte aus (2.1.26) können durch $A_\gamma(\varepsilon)$ ausgedrückt werden in der Form(***)

(*) Funktionen mit einer Tilde sind analytisch in der komplexen Ebene für nichtreelle z.

(**) h_γ ist der freie Hamiltonoperator: $\langle\gamma|h|\gamma\rangle = (2m)^{-1}\vec{p}^{\,2}$.

(***) Im Fall der Kernmaterie kann die Kontinuumssubstitution $\sum_\gamma \longrightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \sum_\eta \int d^3\vec{p}$ verwendet werden (HD59).

$$E_0^{(1)} = \langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle = -\frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon\, e^{i\varepsilon 0} \frac{1}{2} \sum_\gamma \left(\varepsilon + \langle \gamma | h | \gamma \rangle \right) G^{(1)}_{\gamma\gamma}(\varepsilon) \qquad 3.1.13$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon \sum_\gamma \left(\varepsilon + h_\gamma + \mu \right) A_\gamma(\varepsilon) \,, \qquad 3.1.14$$

$$n_{\gamma\gamma} = \langle \phi_0 | \psi_\gamma^+ \psi_\gamma | \phi_0 \rangle = -\frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon\, e^{i\varepsilon 0} G^{(1)}_{\gamma\gamma}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, A_\gamma(\varepsilon) \,.$$

Zur Berechnung der Spektralfunktion gehen wir zurück zu (3.1.9), woraus mit der Darstellung der δ-Funktion von (3.1.3) sich $A_\gamma(\varepsilon)$ durch Differenzbildung der Randwerte von $G^{(1)}$ gemäß

$$A_\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \left(\tilde{G}^{(1)}_\gamma(\varepsilon + io) - \tilde{G}^{(1)}_\gamma(\varepsilon - io) \right) \qquad 3.1.15$$

ergibt.

$\tilde{G}^{(1)}_\gamma(\varepsilon \pm io)$ berechnen wir nach (3.1.11), so daß unter Verwendung der Identität

$$(AB)^{-1} = (B-A)^{-1} \left(A^{-1} - B^{-1} \right), \qquad 3.1.16$$

wobei

$$A := a + b \,, \qquad 3.1.17$$

$$B := a + c \,, \qquad 3.1.18$$

$$a := \varepsilon - (2m)^{-1} \vec{k}^2 + \mu \,, \qquad 3.1.19$$

$$b := -\tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon + io) + io \,, \qquad 3.1.20$$

$$c := -\tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon - io) - io \qquad 3.1.21$$

zu setzen ist, (3.1.15) übergeht in

$$A_\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma_\gamma(\varepsilon)}{2}}{\left((\varepsilon - h_\gamma + \mu) - \Sigma_\gamma^{(\Xi)}(\varepsilon) \right)^2 + \left(\frac{\Gamma_\gamma(\varepsilon)}{2} \right)^2} \qquad 3.1.22$$

mit

$$\tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon + io) = \Sigma_\gamma^{(\Xi)}(\varepsilon) - \frac{i}{2} \Gamma_\gamma(\varepsilon) \,. \qquad 3.1.23$$

Wegen der Konjugationsbeziehung (3.1.10) folgt für den Massenoperator mit (3.1.11)

$$\tilde{\Sigma}_\gamma(z^*) = \tilde{\Sigma}_\gamma^*(z), \qquad 3.1.24$$

weswegen gilt:

$$\Gamma_\gamma(\varepsilon) := i\left(\tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon+i0) - \tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon-i0)\right) = -2\,\pi_\gamma^{(\pi)}(\varepsilon+i0), \qquad 3.1.25$$

$$\Sigma_\gamma^{(\pi)}(\varepsilon) := \frac{1}{2}\left(\tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon+i0) + \tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon-i0)\right). \qquad 3.1.26$$

Anhand der Spektralfunktion von (3.1.22) sehen wir, daß $A_\gamma(\varepsilon)>0$ gemäß (3.1.7) genau dann erfüllt ist, wenn $\Gamma_\gamma(\varepsilon)>0$ gilt. Dies wurde von Luttinger 1961 (LU61) bewiesen.

Wie wir bereits im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, Gleichung (2.3.14) aus Kapitel 2, ist der Massenoperator über die effektive Streumatrix T und die Zweipunktfunktion gegeben. Mit dem Ausdruck (3.1.6) für $G^{(1)}$ und den Gleichungen (3.2.10) bis (3.2.13) der analytisch fortgesetzten T-Matrix des nächsten Abschnitts lautet der Massenoperator

$$\Sigma_\gamma(\varepsilon) = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\gamma'}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon'\, e^{i\varepsilon' 0_+} \langle\gamma\gamma'|\, T(\varepsilon+\varepsilon')\,|\gamma\gamma'\rangle\; G_{\gamma'}^{(1)}(\varepsilon') \qquad 3.1.27$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\sum_{\gamma'}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon'\, e^{i\varepsilon' 0_+}\; G_{\gamma'}^{(1)}(\varepsilon')\; \langle\gamma\gamma'|\; \theta(\varepsilon+\varepsilon')\,\tilde{T}(\varepsilon+\varepsilon'+2i0) \qquad 3.1.28$$

$$+\,\theta(-\varepsilon-\varepsilon')\,\tilde{T}(\varepsilon+\varepsilon'-2i0)\,|\gamma\gamma'\rangle$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\gamma'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon' \, e^{i\varepsilon' 0_+} \left\{ \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon'' \frac{A_{\gamma'}(\varepsilon'')}{\varepsilon' - \varepsilon'' - i0} + \int_{0}^{\infty} d\varepsilon'' \frac{A_{\gamma'}(\varepsilon'')}{\varepsilon' - \varepsilon'' + i0} \right\} \qquad 3.1.29$$

$$\langle \gamma\gamma' | \left\{ \int \frac{dE}{2\pi i} \left(\tilde{T}(E+i0) - \tilde{T}(E-i0) \right) \left(\frac{\theta(\varepsilon+\varepsilon')}{E-\varepsilon-\varepsilon'+2i0} + \frac{\theta(-\varepsilon-\varepsilon')}{E-\varepsilon-\varepsilon'-2i0} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\tilde{T}(\infty+i0) + \tilde{T}(\infty-i0) \right) \right\} | \gamma\gamma' \rangle ,$$

wobei im dritten Ausdruck (3.1.12) benutzt wurde.

Komplexe Integration liefert im Anschluß

$$\Sigma_\gamma(\varepsilon) = \sum_{\gamma'} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon' \, A_{\gamma'}(\varepsilon') \, \langle \gamma\gamma' | \left\{ \left(\theta(\varepsilon+\varepsilon') \, \tilde{T}(\varepsilon+\varepsilon'+2i0) \right.\right. \qquad 3.1.30$$

$$\left. + \theta(-\varepsilon-\varepsilon') \, \tilde{T}(\varepsilon+\varepsilon'-2i0) \right) \theta(-\varepsilon')$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} dE \, \frac{\tilde{T}(E+i0) - \tilde{T}(E-i0)}{E-\varepsilon-\varepsilon'+2i0} \right\} | \gamma\gamma' \rangle .$$

Mit (3.2.10) und (3.2.12) aus dem nächsten Abschnitt kann (3.1.30) umgeformt werden in

$$\Sigma_\gamma(\varepsilon) = \sum_{\gamma'} \left\{ \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \, A_{\gamma'}(\varepsilon') \, \langle \gamma\gamma' | T(\varepsilon+\varepsilon') | \gamma\gamma' \rangle + \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \, G^{(4)}_{\gamma'}(\varepsilon'-\varepsilon) \, \langle \gamma\gamma' | \tau(\varepsilon') | \gamma\gamma' \rangle \right\} . \qquad 3.1.31$$

Mit der Definition

$$\tilde{\Sigma}_\gamma(z) = \sum_{\gamma'} \left\{ \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \, A_{\gamma'}(\varepsilon') \, \langle \gamma\gamma' | T(z+\varepsilon') | \gamma\gamma' \rangle + \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \, \tilde{G}^{(4)}_{\gamma'}(\varepsilon'-z) \, \langle \gamma\gamma' | \tau(\varepsilon') | \gamma\gamma' \rangle \right\} \qquad 3.1.32$$

läßt sich zeigen, daß die Selbstenergie $\Sigma_\gamma(\varepsilon)$, analog zu (3.1.12), durch Limesbildung an die reelle Achse via

$$\Sigma_\gamma(\varepsilon) = \lim_{\nu \to 0_+} \left(\theta(\varepsilon)\, \tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon + i\nu) + \theta(-\varepsilon)\, \tilde{\Sigma}_\gamma(\varepsilon - i\nu) \right) \qquad 3.1.33$$

gegeben ist.

3.2 Eigenschaften der T-Matrix und der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren.

Wie im letzten Abschnitt 3.1 beschränken wir uns auf eine knappe Formulierung der relevanten Gleichungen. Eine ausführliche Behandlung findet man in (WW71).

Das analytische Verhalten der T-Matrix und der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren folgt aus den Eigenschaften der analytisch fortgesetzten Zweipunktfunktion von (3.1.9). Mittels der Spektraldarstellung (3.1.6) erhält man für die Propagatoren aus (2.2.12-14)

$$\Lambda^{(ij)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1'\alpha_2'}(E) = \frac{i}{2\pi}\int d\varepsilon \begin{cases} G^{\circ}_{\alpha_1\alpha_1'}(\varepsilon_1)\, G^{\circ}_{\alpha_2\alpha_2'}(\varepsilon_2) \\ \frac{1}{2}\left[G^{\circ}_{\alpha_1\alpha_1'}\, G^{(1)}_{\alpha_2\alpha_2'} + G^{(1)}_{\alpha_1\alpha_1'}\, G^{\circ}_{\alpha_2\alpha_2'} \right] \\ G^{(1)}_{\alpha_1\alpha_1'}\, G^{(1)}_{\alpha_2\alpha_2'} \end{cases} \qquad 3.2.1$$

mit $\quad \varepsilon_j := \frac{E}{2} \pm \varepsilon \qquad 3.2.2$

in Kernmaterie:

$$\Lambda^{(ij)}_{\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2'}(E) = \delta_{\alpha_1\alpha_1'}\, \delta_{\alpha_2\alpha_2'}\, \Lambda^{(ij)}_{\alpha_1\alpha_2}(E), \qquad 3.2.3$$

$$\Lambda^{(ij)}_{\alpha_1\alpha_2}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \; \frac{\left[A_{\alpha_1}(\varepsilon_1)\, A_{\alpha_2}(\varepsilon_2) \right]^{(ij)} \left(\theta(\varepsilon_1)\,\theta(\varepsilon_2) - \theta(-\varepsilon_1)\,\theta(-\varepsilon_2) \right)}{E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2i0\left(\theta(\varepsilon_1)\,\theta(\varepsilon_2) - \theta(-\varepsilon_1)\,\theta(-\varepsilon_2) \right)} \, . \qquad 3.2.4$$

(*) $\theta(\varphi) := 2^{-1}\,(1 + \varphi/|\varphi|)$.

$[A_{\alpha_1}(\varepsilon_1)\, A_{\alpha_2}(\varepsilon_2)]^{(ij)}$ wird analog zu (3.2.1) gebildet.

Zur Einführung der analytischen Funktionen $\tilde{\Lambda}(z)$ und $\tilde{T}(z)$ schreiben wir (vgl. mit (3.1.9))

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha_1\alpha_2}(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \; \frac{A_{\alpha_1}(\varepsilon_1)\, A_{\alpha_2}(\varepsilon_2)}{z-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \left(\theta(\varepsilon_1)\theta(\varepsilon_2) - \theta(-\varepsilon_1)\theta(-\varepsilon_2)\right) \tag{3.2.5}$$

$$= \int d\Omega \; \frac{\lambda_{\alpha_1\alpha_2}(\Omega)}{z-\Omega} \; , \tag{3.2.5'}$$

wobei

$$\lambda_{\alpha_1\alpha_2}(\Omega) := \int d\omega \; A_{\alpha_1}\left(\tfrac{\Omega}{2}+\omega\right) A_{\alpha_2}\left(\tfrac{\Omega}{2}-\omega\right) \Big(\theta\left(\tfrac{\Omega}{2}+\omega\right)\theta\left(\tfrac{\Omega}{2}-\omega\right) - \theta\left(-\tfrac{\Omega}{2}-\omega\right)\theta\left(-\tfrac{\Omega}{2}+\omega\right)\Big) \tag{3.2.6}$$

bedeutet $\left(\varepsilon_{1,2} =: \frac{\Omega}{2} \pm \omega\right)$.

Die "physikalischen" Propagatoren findet man durch die Grenzwertbildung

$$\Lambda^{(ij)}(E) = \lim_{\upsilon \to 0_+} \left(\theta(E)\, \tilde{\Lambda}^{(ij)}(E+2i\upsilon) + \theta(-E)\, \tilde{\Lambda}^{(ij)}(E-2i\upsilon) \right) . \tag{3.2.7}$$

Mittels $\tilde{\Lambda}^{(ij)}(z)$ kann die Streumatrix $\tilde{T}(z)$ für komplexe Energieargumente z definiert werden. Im Energie-Impuls-Raum ($\gamma_i = (\vec{p}_i ; \eta_i)$) lautet die Gleichung (2.3.3) für $T^{(ij)}(z)$(*)

$$\langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | \tilde{T}^{(ij)}(z) | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle = 2 \langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | V^{(a)} | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle$$
$$+ \sum_{\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2} \int d^3\tilde{q}_1 d^3\tilde{q}_2 \sum_{\tilde{\eta}_1' \tilde{\eta}_2'} \int d^3\tilde{q}_1' d^3\tilde{q}_2' \; \langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | V^{(a)} | \tilde{q}_1 \tilde{\eta}_1 \tilde{q}_2 \tilde{\eta}_2 \rangle$$
$$\tilde{\Lambda}^{(ij)}_{\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \tilde{\eta}_1' \tilde{\eta}_2'} (\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 ; \tilde{q}_1' \tilde{q}_2' ; z) \langle \tilde{q}_1 \tilde{\eta}_1 \tilde{q}_2 \tilde{\eta}_2 | \tilde{T}^{(ij)}(z) | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle \tag{3.2.8}$$

(*) Im Anhang A.9.2 ist die Darstellung der Integralgleichung der $T^{(ij)}$-Matrix im Energie-Impuls-Raum näher diskutiert.

die für translationsinvariante Systeme mit (3.2.3) in

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}^{(ij)}(z) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle = 2 \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid V^{(0)} \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle + \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\gamma_3 \gamma_4} \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid V^{(0)} \mid \gamma_3 \gamma_4 \rangle \tilde{\Lambda}^{(ij)}_{\gamma_3 \gamma_4}(z) \langle \gamma_3 \gamma_4 \mid \tilde{T}^{(ij)}(z) \mid \gamma_1' \gamma_2' \tag{3.2.9}$$

übergeht. Die Integralgleichung (3.2.9) wird im Anhang A.9.2 genauer behandelt. Die Singularitäten und Schnitte der analytisch fortgesetzten Streumatrizen $\tilde{T}^{(ij)}(z)$ können anhand (3.2.9) diskutiert werden (WW71).

Für die "physikalische" T-Matrix T(E) findet man

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid T(E) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle = \lim_{\nu \to 0_+} \left(\theta(E) \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}(E+i0) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle + \theta(-E) \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}(E-i0) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle \right). \tag{3.2.10}$$

Bei der Darstellung der Streumatrix $\tilde{T}(z)$ als Cauchyintegral ist zu beachten, daß $\tilde{T}(z)$ im allgemeinen einen Schnitt entlang der reellen Achse und ferner bei hinreichender Stärke des attraktiven Teils der Wechselwirkung auch Pole in der komplexen Ebene hat (MW63). Im Fall komplexer Pole ist der Ausdruck

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}(z) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle = \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid T^0 \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle + \int dE \, \frac{\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tau(E) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle}{z - E} \tag{3.2.11}$$

mit der Spektralfunktion

$$\tau(E) := \frac{i}{2\pi} \lim_{\nu \to 0_+} \left(\tilde{T}(E+i\nu) - \tilde{T}(E-i\nu) \right) \tag{3.2.12}$$

und

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid T^0 \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle = \frac{1}{2} \lim_{\nu \to 0_+} \left(\langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}(\alpha + i\nu) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle + \langle \gamma_1 \gamma_2 \mid \tilde{T}(\alpha - i\nu) \mid \gamma_1' \gamma_2' \rangle \right) \tag{3.2.13}$$

entsprechend zu modifizieren(*).

(*) Im Fall von Potentialen, die einen sog. Hard-Core enthalten, verweisen wir auf die Arbeiten (WI78) und (WWW83).

3.3 Berechnung der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren.

In der $\Lambda^{(00)}$-Approximation ist die Spektralfunktion $A(p;\varepsilon)$ aus (3.1.22) durch

$$A_i^0(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - k_i + \mu) \qquad i = \gamma_1, \gamma_2 \qquad 3.3.1$$

gegeben. Einsetzen von (3.3.1) in (3.2.5) führt auf folgende Gleichung für den $\Lambda^{(00)}$-Propagator:

$$\tilde{\Lambda}^{(00)}(\vec{p}_1,\vec{p}_2;z) = \left(z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + 2\mu\right)^{-1} \qquad 3.3.1'$$
$$\left(\theta\left(\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}-\mu\right)\theta\left(\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}-\mu\right) - \theta\left(\mu-\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}\right)\theta\left(\mu-\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}\right)\right) .$$

Anhand Gleichung (3.3.1') erkennt man, daß die beiden in intermediäre Zustände gestreuten Teilchen frei propagieren. Das Energiespektrum wird allein durch die kinetische Energie der Teilchen 1 und 2 festgelegt.

Im nächsten Schritt berechnen wir $\Lambda^{(10)}(\vec{p}_1,\vec{p}_2;z)$. Dazu gehen wir ähnlich vor wie bei der Bestimmung von $\Lambda^{(00)}(\vec{p}_1,\vec{p}_2;z)$ aus (3.3.1'). Für die Spektralfunktionen $A_\gamma(\varepsilon)$ in (3.2.4) setzen wir $A^0(\varepsilon_i;\vec{p}_i)=\delta(\varepsilon_i-(2m)^{-1}\vec{p}_i^{\,2}+\mu)$ mit $i=1,2$, so daß sich an (3.2.4)

$$\Lambda^{(10)}(E) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\varepsilon \left\{ \frac{A(\vec{p}_1;\varepsilon)}{E - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \mu - \varepsilon + 2i0} + \frac{A(\vec{p}_2;\varepsilon)}{E - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \mu - \varepsilon + 2i0} \right\} \qquad 3.3.2$$

anschließt.

Die Integration in (3.3.2) spalten wir auf in $\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{0}$ und verwenden die analytisch fortgesetzte Zweipunktfunktion $\tilde{G}^{(1)}_{\vec{p}_1}(z)$ von (3.1.9) in Verbindung mit Gleichung (3.1.11). Damit ergeben sich (nur erstes Integral) mit $z=E-(2m)^{-1}\vec{p}_i^{\,2}+\mu+2i0$ für die Zweipunktfunktionen die Ausdrücke

$$\tilde{G}^{(1)}_{\vec{p}_1}(z) = \left(z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + 2\mu - \tilde{\Sigma}\left(p_1; E - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \mu\right)\right)^{-1} , \qquad 3.3.3$$

$$\tilde{G}^{(1)}_{\vec{p}_2}(z) = \left(z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + 2\mu - \tilde{\Sigma}\left(p_2; E - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \mu\right)\right)^{-1} . \qquad 3.3.3'$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{0}$ erstreckt sich über negative Frequenzen. Da $\Lambda^{(10)}$, ebenso wie $\Lambda^{(00)}$, in diesem Bereich keinen Schnitt hat, verschwindet auch in dieser Näherung der Imaginärteil des Massenoperators, so daß mithin (vgl. (3.1.25)) $\Gamma_\gamma(\varepsilon) \longrightarrow 0$ und

$$A_\gamma(\varepsilon) = \delta\left(\left(\varepsilon - \lambda_\gamma + \mu\right) - \Sigma_\gamma^{(\pi)}(\varepsilon)\right), \quad \varepsilon < 0 \qquad 3.3.4$$

gilt.

Ersetzen von $A_\gamma(\varepsilon)$ durch $A(\vec{p};\varepsilon)=n(p)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon(p)+\mu)$ (s. Kapitel 7), Integration und Zusammenfassung beider Terme liefert unmittelbar für den $\Lambda^{(10)}$-Propagator(*)

$$\tilde{\Lambda}^{(10)}(\vec{p}_1,\vec{p}_2;z) = \frac{1}{2}\Big(\Big(z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + 2\mu - \tilde{\Sigma}\left(p_2; z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \mu\right)\Big)^{-1} \qquad 3.3.5$$

$$- \frac{n(p_2)\,\theta(\mu - \varepsilon(p_1))}{z - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} - \varepsilon(p_2) + 2\mu} + (\vec{p}_1 \rightleftharpoons \vec{p}_2)\Big).$$

Im Unterschied zu $\Lambda^{(00)}$ ist in $\Lambda^{(10)}$ nur ein Teilchen "frei". Ferner trägt in (3.3.5) der sog. "off-shell"-Massenoperator bei (Σ("$p \neq \varepsilon(p)$")), der, wie noch gezeigt wird, das Selbstkonsistenzproblem erheblich verkompliziert. Der Summand in (3.3.5), der die Besetzungszahlverteilung n(p) enthält, wird als "Dressing"-Term bezeichnet. Er trägt nur für Impulse p_i (i=1,2) bei, die kleiner als der Fermiimpuls sind, wodurch dem Pauliprinzip teilweise Rechnung getragen wird. Dies wird in Kapitel 4 gezeigt - das Ergebnis wollen wir jedoch bereits hier festhalten. Man findet die Beziehung ($\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \varepsilon^2} \ll 1$)

$$\Lambda^{(10)}(\vec{p}_1,\vec{p}_2;\varepsilon) \approx \frac{1}{2}\, n^2(p_1)\, \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\, \Sigma(p_1,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon = \varepsilon(p_1) - \mu} \quad \forall p_1, p_2 \leq p_F. \qquad 3.3.6$$

(*) Der Propagator von Brueckner ist auf Seite 49 angegeben.

Bei der Angabe des $\Lambda^{(11)}$-Propagators greifen wir auf eine plausible Näherung zurück, da andernfalls die selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen, die wir in Kapitel 7 finden, auch mit numerischen Verfahren nicht zu bewältigen ist.
Dazu approximieren wir $A_\alpha(\varepsilon)$ von (3.1.22) durch eine δ-Funktion gemäß (3.3.4) in der Form

$$A(p;\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \varepsilon(p) + \mu) \qquad 3.3.7$$

und ersetzen io durch $\frac{i}{2}(\gamma(p_1) + \gamma(p_2))$ (*).
Mit diesen beiden Näherungen und der Identität $\theta(x_1)\theta(x_2) - \theta(-x_1)\theta(-x_2) = 1 - \theta(-x_1) - \theta(-x_2)$ führt (3.2.5) auf

$$\Lambda^{(11)}(p_1, p_2; \varepsilon + io) = \frac{1 - \theta(\mu - \varepsilon(p_1)) - \theta(\mu - \varepsilon(p_2))}{\varepsilon + 2\mu - \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p_2) + \frac{i}{2}(\gamma(p_1) + \gamma(p_2))} . \qquad 3.3.8$$

Die Einzelimpulse der Nukleonen 1 und 2 sind mit dem Relativ- ($\vec{q}$) und Schwerpunktsimpuls ($\vec{P}$) durch

$$p_{\pm} \equiv p_{\substack{1\\2}} = |2^{-1}\vec{P} \pm \vec{q}| \qquad 3.3.9$$

verknüpft.
Schreiben wir für den Zähler von (3.3.8) (**)

$$1 - \theta(\mu - \varepsilon(p_1)) - \theta(\mu - \varepsilon(p_2)) = 1 - \theta(p_F - p_+) - \theta(p_F - p_-) \qquad 3.3.10$$

$$= \theta(|\tfrac{1}{2}\vec{P} + \vec{q}|^2 - p_F^2)\,\theta(|\tfrac{1}{2}\vec{P} - \vec{q}|^2 - p_F^2) \qquad 3.3.11$$

$$- \theta(p_F^2 - |\tfrac{1}{2}\vec{P} - \vec{q}|^2)\,\theta(p_F^2 - |\tfrac{1}{2}\vec{P} - \vec{q}|^2) \qquad 3.3.12$$

$$\equiv N(\vec{q}, \vec{P}) ,$$

(*) In Kapitel 7 wird gezeigt, daß $\gamma(p) \longrightarrow 0$ für $p \longrightarrow p_F$ gilt. Die Größen $\varepsilon(p)$, $\gamma(p)$ und $n(p)$ sind in Kapitel 7 definiert.

(**) $\varepsilon(p_F) = \mu$ (s. Fußnote (**) auf Seite 13 und Kapitel 7).

wobei die Funktion $N(\vec{q},\vec{P})$ später explizit diskutiert wird, ergibt sich für (3.3.8)(*)

$$\Lambda^{(11)}(p_+, p_-; \varepsilon+i0) = \frac{N(\vec{q},\vec{P})}{\varepsilon + 2\mu - \sum_{j=\pm}(\varepsilon_j - \frac{i}{2}\gamma_j)} . \qquad 3.3.13$$

Der $\Lambda^{(11)}$-Propagator ist der exakte Zweiteilchenpropagator im Sinne der Leiterapproximation zur T-Matrix (Abschnitte 2.2 und 2.4), der das intermediäre Teilchenspektrum angemessen (volle Einteilchenenergien für beide Teilchen, Pauliprinzip via $N(\vec{q},\vec{P})$) beschreibt.

Zu Vergleichszwecken geben wir den Propagator von Brueckner und Mitarbeitern (BL55,BR56,BR58,BG58) an. Dieser hat bei den genannten Autoren die Form

$$\Lambda^{(BR)}(p_+, p_-; \varepsilon) = \frac{(1-\theta(p_F-p_+))(1-\theta(p_F-p_-))}{\varepsilon - \sum_{j=\pm}\varepsilon_j} . \qquad 3.3.13'$$

Ein Vergleich von $\Lambda^{(11)}$ mit (3.3.13') zeigt, daß $\Lambda^{(BR)}$ nur die Streuung in Zwischenzustände überhalb der Fermikante berücksichtigt, während (3.3.13) über die Funktion $N(\vec{q},\vec{P})$ auch Beiträge von virtuellen Löchern innerhalb des Fermisees leifert.Die mit dem Brueckner-Propagator berechnete T-Matrix ist ferner reell, so daß der Imaginärteil der Selbstenergie $\gamma(p)$ (vgl. Diskussion in Kapitel 7) hier nicht auftritt. Da $\gamma(p)$ physikalisch die Breiten der Einteilchenenergien $\varepsilon(p)$ ausdrückt, gilt für die Lebensdauer τ der (Quasi-)Teilchen im Fall des Brueckner-Propagators $\tau(p)=\hbar\gamma^{-1}(p) \longrightarrow \infty$.

Eine formale Ähnlichkeit zeigt der $\Lambda^{(11)}$-Propagator auch mit dem von Thouless (TH59) vorgeschlagenen Propagator $\Lambda^{(TH)}$, wenn die Lochpro-

---

(*) Abkürzend wird häufig verwendet: $\varepsilon_j \equiv \varepsilon_{p_j} \equiv \varepsilon(p_j)$ und $\hat{\varepsilon}_j \equiv \varepsilon_j - \mu$.

pagation vernachlässigt und Besetzungszahlwahrscheinlichkeiten n(p) für Zustände mit Impulsen p eingeführt werden.

Abschließend halten wir die Ähnlichkeit des genäherten $\Lambda^{(11)}$-Propagators von Gleichung (3.3.8) mit dem Propagator von Galitskii und Migdal (GM58,GA58) und Bishop (BI73+)

3.3.14

$$\Lambda^{(G)}(p_+, p_-; \varepsilon \pm io) = \frac{N(\vec{q}, \vec{P})}{\varepsilon + 2\mu - \sum_{j=\pm} \varepsilon_j^0 + io\, N(\vec{q}, \vec{P})}$$

fest.

Er trägt in gleicher Weise wie (3.3.8) dem Pauliprinzip via der Impulsverteilung des freien Fermigases $N(\vec{q},\vec{P})$ von (3.3.10) Rechnung, berücksichtigt aber im Nenner statt der vollen Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$ nur deren kinetischen Anteil $\varepsilon^0(p)=(2m)^{-1}p^2$. Ferner wird der Imaginärteil des Propagators $\Lambda^{(G)}$ nur durch $o\, N(\vec{q},\vec{P})$ statt durch $\gamma(p_+)+\gamma(p_-)$ festgelegt.

4. Formulierung des Nukleon-Nukleon-Streuproblems.

Wir beginnen mit der Diskussion des Møllerschen Operators, der der zeitunabhängigen Integralgleichung $\Omega = \mathbb{1} + \Lambda^{(ii)} V^{(a)} \Omega$ (bzw. der dazu äquivalenten Differentialgleichung (s. unten)) genügt. Die Einführung des Wellenoperators Ω wird sich als zweckmäßig erweisen. Die Streumatrix T ist damit durch $T = 2V^{(a)}\Omega$ gegeben.
Die zu lösenden Operatorgleichungen OSG und OLS(*) für den Møller-operator legen die in der Standardstreutheorie übliche Partial-wellenentwicklung des Zweiteilchen-Streuproblems (mit Spin) nach Drehimpuls-Eigenfunktionen $\mathcal{Y}^{LS}_{JM}$ nahe.

In der "normalen" Streutheorie (NE60,GW64,NE66,TA72,JO75) steht man vor der Aufgabe, die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{L(L+1)}{r^2}\right) R_L(k,r) + V(r)\, R_L(k,r) = E\, R_L(k,r)$$

bzw. die äquivalente Lippmann-Schwinger-Gleichung(**)

$$\psi_{\vec{k}_i}(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{k}_i;\vec{r}) + \int d^3\vec{r}\,'\, G_0(\vec{r},\vec{r}\,')\, U(\vec{r}\,')\, \psi_{\vec{k}_i}(\vec{r}\,')$$

zu lösen.
Im weiteren werden wir uns mit der off-shell Lippmann-Schwinger-Gleichung beschäftigen, bevor die off-shell Schrödinger-Gleichung und die nötigen Änderungen der entsprechenden Streugleichungen bei Verwendung von Potentialen mit Hard-Core diskutiert werden.

(*) Siehe Abkürzungsverzeichnis im Anhang.

(**) Vgl. (JO75).

4.1 Anmerkungen zur Zerlegung nach Drehimpulsfunktionen (Multipolentwicklung).

Als natürliche Basisfunktionen unseres Streuproblems benutzen wir die mit den Spineigenfunktionen $\left|\begin{matrix} S \\ M_S \end{matrix}\right\rangle$ gekoppelten ebenen Wellen

$$\langle \vec{r} \,|\, \vec{k} \rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \, e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \,, \qquad 4.1.1$$

deren Partialwellenentwicklung(*)

$$\langle \vec{r} \,|\, \vec{k} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{LM_L} i^L \, Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{k}}) \, \frac{\varphi_L(kr)}{kr} \, Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}}) \qquad 4.1.2$$

lautet. $\varphi_L(kr)$ ist die Riccati-Besselfunktion der Ordnung L, die mit der sphärischen Besselfunktion $j_L(kr)$ über

$$\varphi_L(kr) = (kr) \, j_L(kr) \qquad 4.1.3$$

zusammenhängt. Die Kopplung des Relativbahndrehimpulses L mit dem Gesamtspin S des Zweinukleonensystems führt unter Anwendung des Eins-Operators

$$\mathbb{1} = \sum_{SM_S} \sum_{TT_3} |{}^S_{M_S}\rangle |{}^T_{T_3}\rangle \langle {}^T_{T_3}| \langle {}^S_{M_S}| \qquad 4.1.4$$

auf

$$\langle \vec{r} \,|\, \vec{p} \, {}^S_{M_S} \, {}^T_{T_3} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{JM} \sum_{LL'} \sum_{M_{L'}} \delta_{LL'} \, i^L \, \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) \, j_L(pr) \left({}^{J}_{M} \middle| {}^{L'}_{M_{L'}} \, {}^{S}_{M_S} \right) \qquad 4.1.5$$

$$Y^*_{L'M_{L'}}(\Omega_{\vec{p}}) \, |{}^T_{T_3}\rangle \,.$$

Dabei notieren wir die Vollständigkeitsrelation der freien Zustände

$$\sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{k} \; |\vec{k} \, {}^S_{M_S} \, {}^T_{T_3}\rangle \langle \vec{k} \, {}^S_{M_S} \, {}^T_{T_3}| = \mathbb{1} \qquad 4.1.6$$

in der Ortsdarstellung

(*) Die Definition der Kugelflächenfunktionen Y_{LM_L} ist in (CS51) gegeben.

$$\sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{k} \; \langle \vec{r} | \vec{k} \; {}^{S}_{M_S} \; {}^{T}_{T_3} \rangle \langle \vec{r}' | \vec{k} \; {}^{S}_{M_S} \; {}^{T}_{T_3} \rangle^{+} \qquad 4.1.7$$

$$= (2\pi)^{-3} \sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{k} \; e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \; \chi_{SM_S} \; \chi^{+}_{SM_S} \; \chi_{TT_3} \; \chi^{+}_{TT_3}$$

$$= \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

mit

$$\sum_{SM_S} \chi_{SM_S} \chi^{+}_{SM_S} = 1 , \qquad \sum_{TT_3} \chi_{TT_3} \chi^{+}_{TT_3} = 1 , \qquad \chi_{SM_S} \equiv |{}^{S}_{M_S}\rangle , \chi_{TT_3} \equiv |{}^{T}_{T_3}\rangle \qquad 4.1.7'$$

und der Normierung

$$\langle \vec{k} \; {}^{S}_{M_S} \; {}^{T}_{T_3} \; | \; \vec{k}' \; {}^{S'}_{M_{S'}} \; {}^{T'}_{T_{3'}} \rangle = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \, \delta_{SS'} \, \delta_{M_S M_{S'}} \, \delta_{TT'} \, \delta_{T_3 T_{3'}} \; . \qquad 4.1.8$$

Dazu ist zu bemerken, daß durch die Anwesenheit der Tensorkraft im Potentialoperator V(r) der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (s. Kapitel 5) die Relativbahndrehimpulsquantenzahl L keine Konstante der Bewegung mehr ist. Die Tensorkraft koppelt Triplet-Zustände (S=1) mit gleichen J-Quantenzahlen und gleicher Parität (S=1 und L=J$\pm$1). Zustände mit S=1 und L=J koppeln nicht mit anderen Kanälen, da die Triplet-Zustände mit L=J$\pm$1 eine andere Parität besitzen. In die Berechnung derjenigen Matrixelemente, die den Tensoroperator $\hat{\Omega}_T$ enthalten, gehen die Eigenfunktionen $\mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\hat{r}})$ und $\mathcal{Y}^{L'S^*}_{JM}(\Omega_{\hat{r}'})$ der Operatoren $\hat{\vec{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{\vec{S}}^2$ ein(*).

Die "korrelierte" Wellenfunktion genügt der Zerlegung(**):

(*) Die Bezeichnungen sind in Kapitel 5 erklärt, wo die Berechnung der Matrixelemente der HJ-, RSC- und PAR-Nukleon-Nukleon-Potentiale erfolgt.

(**) Die korrelierte Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ zweier Teilchen geht aus der unkorrelierten Wellenfunktion $|\phi\rangle$ durch Anwendung des Møller-operators hervor: $|\Psi\rangle = \Omega |\phi\rangle$.

$$\langle \vec{r} | \Omega | \vec{p}\, {}^{S}_{M_S} {}^{T}_{T_3} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{M_L'} i^L \, \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) \; \Omega^{\eta ST}_{LL'}(r; p, E) \qquad 4.1.9$$

$$Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{p}}) \left({}^{\eta}_{M} \middle| {}^{L'\,S}_{M_L'\,M_S} \right) \Big| {}^{T}_{T_3} \rangle$$

mit

$$\Omega^{\eta ST}_{LL'}(r; p, E) = (rp)^{-1} \; \Psi^{\eta ST}_{LL'}(r; p, E) \qquad 4.1.9'$$

ein.

Die Multipolentwicklung des Potentials führen wir im nächsten Kapitel durch. Wir nehmen an dieser Stelle das Ergebnis aus 5.1 vorweg. Es gilt (s. (5.1.6-7)):

$$\langle \vec{r} | V | \vec{r}' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) \Big| {}^{T}_{T_3} \rangle \; \frac{\delta(r-r')}{rr'} \; \overline{V}^{\eta ST}_{LL'}(r') \qquad 4.1.10$$

$$\langle {}^{T}_{T_3} | \; \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}'}) \; \xi_{LST} \, \xi_{L'ST} \, .$$

4.2 Partialwellenentwicklung des $\Lambda^{(00)}$-Propagators.

Wir erinnern uns an die Integralgleichung zur Leiterapproximation von (2.4.21), $T=2V^{(a)}+V^{(a)}\Lambda T$, die im Abschnitt 4.5 mittels des Wellenoperators Ω ($T=2V^{(a)}\Omega$) über $\Omega = \mathbb{1} + V^{(a)}\Lambda\Omega$ im Impulsraum (Matrixelemente $\langle \vec{p} | T | \vec{p}' \rangle$) näher untersucht wird.
Auf diese Weise ergeben sich für Ω die Matrixelemente $\langle \vec{r} | \Omega | \vec{p} \rangle$, während für Λ $\langle \vec{r} | \Lambda | \vec{r}' \rangle$-Matrixelemente zu berechnen sind.
Nach (3.3.1') lautet der $\Lambda^{(00)}$-Propagator in Kernmaterie ($\mu<0$)(*)

(*) Bis auf einige Ausnahmen werden Operatoren nich gesondert bezeichnet.

$$\Lambda^{(00)}(E) = \left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu - h^{(rel)} + i0 \right)^{-1} . \qquad 4.2.1$$

Mit der Partialwellenentwicklung der ebenen Welle von (4.1.2) geht (4.2.1) über in (m=Nukleonenmasse)

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(00)}(E; \vec{P}) | \vec{r}' \rangle = \int d^3\vec{p}' \int d^3\vec{p}'' \langle \vec{r} | \vec{p}' \rangle \delta(\vec{p}' - \vec{p}'') \left(\beta - \frac{\vec{p}'^2}{m} + i0 \right)^{-1} \langle \vec{p}'' | \vec{r}' \rangle \qquad 4.2.2$$

$$= \int_0^\infty p'^2 dp' \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{LM_L} i^L Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}}) j_L(p'r) Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}'}) \qquad 4.2.3$$

$$\left(\beta - \frac{\vec{p}'^2}{m} + i0 \right)^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{L'M_{L'}} i^{L'} Y^*_{L'M_{L'}}(\Omega_{\vec{r}'}) j_{L'}(p'r') Y_{L'M_{L'}}(\Omega_{\vec{p}'}) .$$

Wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen Y_{LM_L} ergeben sich die Relationen

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(00)}(\beta; \vec{P}) | \vec{r}' \rangle = \sum_{LM_L} Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}}) \frac{\Lambda_L^{(00)}(r, r'; \beta)}{r r'} Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}'}) \qquad 4.2.4$$

$$= \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) | {}^{T}_{T_3} \rangle \frac{\Lambda_L^{(00)}(r, r'; \beta)}{r r'} \qquad 4.2.5$$

$$\delta_{LL'} \langle {}^{T}_{T_3} | \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}'}) \xi_{LST} \xi_{L'ST}$$

mit

$$\Lambda_L^{(00)}(r, r'; \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp' \frac{\varphi_L(p'r) \varphi_L(p'r')}{\beta - \frac{p'^2}{m} + i0} , \qquad 4.2.6$$

$$- \frac{w^2}{m} \equiv \beta := E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu . \qquad 4.2.7$$

Die Darstellung des Propagators gemäß Gleichung (4.2.5) geben wir aus technischen Gründen an, die weiter unten verständlich werden.

Das Integral in (4.2.6) kann mit bekannten Methoden (Residuenintegration) berechnet werden. Man findet (BI73,JO75)

$$\Lambda_L^{(00)}(r, r'; w) = -k^{-1} \; e^{-i\pi L} \; w^{(+)}(k r_>) \; \varphi_L(k r_<), \qquad 4.2.8$$

wobei

$$w = \begin{cases} \sqrt{-m\beta} & \forall\, \beta < 0 \qquad (E < 2|\mu|) \\ i\sqrt{m\beta} & \forall\, \beta > 0 \qquad (E > 2|\mu|) \end{cases} \qquad 4.2.8'$$

und $r_>$ ($r_<$) für den größeren (kleineren) der beiden Werte r und r' steht.

Explizit erhalten wir aus (4.2.8) (vgl. (OG70)) für S-, P- und D-Wellen im Fall $\beta < 0$ ($\varphi_< = w r_<$, $\varphi_> = w r_>$)

$$\Lambda_{L=0}^{(00)}(r, r'; w) = (2w)^{-1} \left(e^{-(\varphi_< + \varphi_>)} - e^{(\varphi_< - \varphi_>)} \right), \qquad 4.2.9$$

$$\Lambda_{L=1}^{(00)}(r, r'; w) = -(2w)^{-1} \Big(\left(1 + \frac{1}{\varphi_>}\right)\left(1 + \frac{1}{\varphi_<}\right) e^{-(\varphi_< + \varphi_>)} + \left(1 + \frac{1}{\varphi_>}\right)\left(1 - \frac{1}{\varphi_<}\right) e^{-(\varphi_> - \varphi_<)} \Big) \qquad 4.2.10$$

und

$$\Lambda_{L=2}^{(00)}(r, r'; w) = (2w)^{-1} \Big(\left(1 + \frac{3}{\varphi_>} + \frac{3}{\varphi_>^2}\right)\left(1 + \frac{3}{\varphi_<} + \frac{3}{\varphi_<^2}\right) e^{-(\varphi_> + \varphi_<)} - \left(1 + \frac{3}{\varphi_>} + \frac{3}{\varphi_>^2}\right)\left(1 - \frac{3}{\varphi_<} + \frac{3}{\varphi_<^2}\right) e^{-(\varphi_> - \varphi_<)} \Big). \qquad 4.2.11$$

Für $\beta > 0$ schließen sich die Ausdrücke (s. Abkürzungsverzeichnis)

$$\Lambda_{L=0}^{(00)}(r, r'; w) = -w^{-1} \cos \varphi_> \sin \varphi_< , \qquad 4.2.12$$

$$\Pi_0^{(\Lambda^{00})}(r, r'; w) = -w^{-1} \sin\varphi_> \sin\varphi_< , \qquad 4.2.13$$

$$\Sigma_1^{(\Lambda^{00})}(r, r'; w) = w^{-1} \Big(\sin\varphi_> \cos\varphi_< - \varphi_<^{-1} \sin\varphi_> \sin\varphi_< + \varphi_>^{-1} \cos\varphi_> \cos\varphi_< - (\varphi_< \varphi_>)^{-1} \sin\varphi_< \cos\varphi_> \Big) , \qquad 4.2.14$$

$$\Pi_1^{(\Lambda^{00})}(r, r'; w) = w^{-1} \Big(\varphi_>^{-1} \sin\varphi_> \cos\varphi_< - (\varphi_> \varphi_<)^{-1} \sin\varphi_> \sin\varphi_< - \cos\varphi_> \cos\varphi_< + \varphi_<^{-1} \sin\varphi_< \cos\varphi_> \Big) , \qquad 4.2.15$$

$$\Sigma_2^{(\Lambda^{00})}(r, r'; w) = w^{-1} \Big(\cos\varphi_< \cos\varphi_> \left(9 \varphi_< \varphi_>^{-2} - 3 \varphi_<^{-1} \right) + 9 (\varphi_< \varphi_>)^{-1} \cos\varphi_< \sin\varphi_> + \sin\varphi_< \cos\varphi_> \left(-9 (\varphi_> \varphi_<)^{-2} + 3 \varphi_>^{-2} + 3 \varphi_<^{-2} - 1 \right) + \sin\varphi_< \sin\varphi_> \left(-9 \varphi_<^{-2} \varphi_>^{-1} + 3 \varphi_>^{-1} \right) \Big) , \qquad 4.2.16$$

$$\Pi_2^{(\Lambda^{00})}(r, r'; w) = w^{-1} \Big(-9 (\varphi_< \varphi_>)^{-1} \cos\varphi_< \cos\varphi_> + \cos\varphi_< \sin\varphi_> \left(9 \varphi_<^{-1} \varphi_>^{-2} - 3 \varphi_<^{-1} \right) + \sin\varphi_< \cos\varphi_> \left(9 \varphi_<^{-2} \varphi_> - 3 \varphi_> \right) + \sin\varphi_< \sin\varphi_> \left(-9 (\varphi_< \varphi_>)^{-2} + 3 \varphi_<^{-2} + 3 \varphi_>^{-2} - 1 \right) \Big) \qquad 4.2.17$$

an.

4.3 Multipolentwicklung und Raumwinkelmittelung des $\Lambda^{(10)}$-Propagators.

Wir beginnen mit dem $\Lambda^{(10)}$-Propagator aus Kapitel 3, Gleichung (3.3.5). Mit der ebenen Welle von (4.1.5) und der Vollständigkeitsrelation (4.1.6) lautet $\langle \vec{r} \mid \Lambda^{(10)} \mid \vec{r}\,' \rangle$

4.3.1

$$\langle \vec{r} \mid \Lambda^{(10)} \mid \vec{r}\,' \rangle = \sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{q} \sum_{S'M_S'} \sum_{T'T_3'} \int d^3\vec{q}\,' \; \langle \vec{r} \mid \vec{q}\, {S \atop M_S} {T \atop T_3} \rangle$$

$$\langle \vec{q}\, {S \atop M_S} {T \atop T_3} \mid \Lambda^{(10)} \mid \vec{q}\,' {S' \atop M_S'} {T' \atop T_3'} \rangle \; \langle \vec{q}\,' {S' \atop M_S'} {T' \atop T_3'} \mid \vec{r}\,' \rangle$$

4.3.2

$$= \sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int_0^\infty dq\, q^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}} \sqrt{\frac{q}{\pi}} \sum_{JM} \sum_{LL'} \sum_{M_L'} \delta_{LL'}\, i^{L'}\, Y^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})$$

$$j_L(qr)\, Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}}) \left({J \atop M} \middle| {L' \atop M_L'} {S \atop M_S} \right) \Big| {T \atop T_3} \rangle \quad \Lambda^{(10)}_{\vec{P}}(\vec{q}, E)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\hat{J}\hat{M}} \sum_{\hat{L}\hat{L}'} \sum_{\hat{M}_L'} (-i)^{\hat{L}'} \delta_{\hat{L}\hat{L}'}\, Y^{\hat{L}S\,*}_{\hat{J}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}})$$

$$j_{\hat{L}}(qr')\, Y_{\hat{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}}) \left({\hat{J} \atop \hat{M}} \middle| {\hat{L}' \atop \hat{M}_L'} {S \atop M_S} \right) \langle {T \atop T_3} \mid \quad .$$

Die Raumwinkelintegration $\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}}$ in (4.3.2) ist nicht unmittelbar möglich, da die Impulse $p_\pm$ des $\Lambda^{(10)}$-Propagators vom Winkel zwischen Schwerpunkt- und Relativimpuls abhängen (s. (3.3.9)). Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen, besteht nach Brueckner (BG58) darin, $p_\pm^2$ durch dessen winkelgemittelte Größe zu ersetzen:

$$p_\pm^2 \longrightarrow 4^{-1}P^2 + q^2 \pm 3^{(-1/2)} \langle\theta\rangle_{\cos}\, q\, P. \qquad 4.3.3$$

Dabei bedeutet $\langle\Theta\rangle_{\cos}$ die winkelgemittelte Θ-Funktion. Zur kritischen Diskussion verweisen wir auf (BG58).

Unsere weitere Aufgabe besteht zunächst darin, den Ausdruck

$$A := \int d^3\vec{q}\ \Lambda^{(10)}_{\vec{P}}(\vec{q};E)\ Y^{*}_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\ Y_{\hat{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}}) \qquad 4.3.4$$

geeignet über $x=\cos\vartheta_{(\vec{P},\vec{q})}$ zu mitteln.

Wir beginnen dazu mit dem Term von A, der die Θ-Funktion enthält:

$$A_\Theta := \int d^3\vec{q}\ \Theta(p_F - p_\pm)\ \left((\lambda^{00})^{-1} - \Sigma(p_\pm;\varepsilon(p_\pm)-\mu)\right)^{-1} Y^{*}_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\ Y_{\hat{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}}), \qquad 4.3.5$$

$$\lambda^{00}(q,P) := \left(E - \frac{P^2}{4m} + 2\mu - q^2\right)^{-1}. \qquad 4.3.6$$

Für $\Theta(p_F-p_\pm)$ setzen wir eine Entwicklung nach Legendrepolynomen an, die sich wegen der Spiegelungssymmetrie des Integrationsgebietes in (4.3.5) bezüglich einer Ebene durch den Ursprung und senkrecht zu P und einer Zylindersymmetrie um den Schwerpunktsimpuls auf eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen Y_{LM_L} (mit L=gerade und M=0) reduziert (LM63).

Man findet

$$\Theta(q,P) = \sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})} \sqrt{\frac{4\pi}{2\tilde{L}+1}}\ B_{\tilde{L}}(q,P)\ Y_{\tilde{L}0}(\vartheta). \qquad 4.3.7$$

Wir beschränken uns auf den Entwicklungskoeffizienten $B_L(q,P)$ mit $\tilde{L}=0$ ($B_{\tilde{L}=0}(q,P>2p_F)\equiv 0$)

$$B_{\tilde{L}=0}(q;P<2p_F) = \begin{cases} 0 & \forall\, q > \sqrt{p_F^2 - \frac{1}{4}P^2} \\ \left(-q^2 + \frac{1}{4}P^2 - p_F^2\right)(Pq)^{-1} & \forall\, \sqrt{p_F^2 - \frac{1}{4}P^2} > q > p_F - \frac{1}{2}P \\ 1 & \forall\, q < p_F - \frac{1}{2}P \end{cases} \qquad 4.3.8$$

und substituieren nach Brueckner (vgl. (4.3.3))

$$p_{\pm}^2 \longrightarrow 4^{-1}P^2 + q^2 \pm 3^{(-1/2)}\, B_0(q,P)\, q\, P \equiv \langle p_{\pm}^2 \rangle \qquad 4.3.9$$

in den entsprechenden Ausdrücken.

Damit ergibt sich für (4.3.4) der Ausdruck(*)

$$A = \int d^3\vec{q}\; \tfrac{1}{2}\Big(\big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+; E - \tfrac{P_-^2}{2m} + \mu)\big)^{-1} \qquad 4.3.10$$

$$- n(P_+)\; \theta(P_F - P_+)\; \big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+, \varepsilon(P_+) - \mu)\big)^{-1} + (P_+ \rightleftharpoons P_-)\Big)$$

$$Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})$$

$$4.3.11$$

$$= \int_0^\infty dq\, q^2 \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \tfrac{1}{2}\Big(\big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+, E - \tfrac{P_-^2}{2m} + \mu)\big)^{-1}$$

$$- \sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})} \sqrt{\tfrac{4\pi}{2\tilde{L}+1}}\; B_{\tilde{L}}(q,P)\, Y_{\tilde{L}0}(\Omega_{\vec{q}})\; n(P_+)\big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+; \varepsilon_{P_+} - \mu)\big)^{-1}$$

$$+ (P_+ \rightleftharpoons P_-)\Big)\; Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})$$

$$4.3.12$$

$$= \int_0^\infty dq\, q^2\, \tfrac{1}{2}\big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+; E - \tfrac{P_-^2}{2m} + \mu)\big)^{-1}\, \delta_{L'\tilde{L}'}\, \delta_{M_L'\hat{M}_L'}$$

$$+ \sqrt{4\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, \tfrac{1}{2} \sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})} \sqrt{\tfrac{1}{2\tilde{L}+1}}\; B_{\tilde{L}}(q,P)\Big(n(P_+)\big(\lambda^{00\,-1} - \Sigma(P_+, \varepsilon_{P_+} - \mu)\big)^{-1}\Big) + (P_+ \rightleftharpoons$$

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}0}(\Omega_{\vec{q}})$$

an.

Die Winkelintegrale über das Produkt der Kugelflächenfunktionen in (4.3.12) schreiben wir als (ROS57)

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\; Y^*_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})\; Y_{\tilde{L}0}(\Omega_{\vec{q}}) \qquad 4.3.13$$

$$= \sqrt{\frac{2(\tilde{L}+1)(2\tilde{L}'+1)}{4\pi(2L'+1)}}\; \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{L}' & L' \\ 0 & \hat{M}_L' & M_L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{L}' & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

(*) Der Spezialfall $\tilde{L}=0$ (s. (4.3.8)) wird unten diskutiert.

wobei der Clebsch-Gordan Koeffizient $\left(\begin{matrix}\tilde{L}\,\hat{L}'\\ 0\,\hat{M}_L'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L'\\ M_L'\end{matrix}\right)=0$ falls nich $\hat{M}_L'=M_L'$ ist.

Nach einigen länglichen Umformungen erhalten wir für (4.3.1)

4.3.14

$$\langle\vec{r}|\Lambda^{(10)}|\vec{r}'\rangle = \sum_{JM}\sum_{LS}\sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})|{}^{T}_{T_3}\rangle \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2 \frac{1}{2}\Big(\big(\lambda^{\infty^{-1}} - \Sigma(\rho_+; E - \frac{\rho_-^2}{2m} + \mu)\big)^{-1}$$

$$+ (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big) \langle{}^{T}_{T_3}| \mathcal{Y}^{LS^*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$- \sum_{SM_S}\sum_{TT_3}\sum_{JM}\sum_{LL'}\sum_{M_L'} \frac{2}{\pi}\delta_{LL'}\, i^{L'}\, \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})\, j_L(qr) \left(\begin{matrix}J\\ M\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L'\,S\\ M_L'\,M_S\end{matrix}\right)|{}^{T}_{T_3}\rangle$$

$$\sum_{\hat{L}'}\sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})}^{\infty} \sqrt{\frac{2\hat{L}'+1}{2L'+1}} \left(\begin{matrix}\tilde{L}\,\hat{L}'\\ 0\,M_L'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L'\\ M_L'\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\tilde{L}\,\hat{L}'\\ 0\,0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L'\\ 0\end{matrix}\right)\int_0^\infty dq\, q^2 \frac{1}{2} B_{\tilde{L}}(q,\rho)\Big(n(\rho_+)\big(\lambda^{\infty^{-1}} - \Sigma(\rho_+, \hat{\varepsilon}_{\rho_+})\big)^{-1}$$

$$+ (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big)$$

$$\sum_{\hat{J}\hat{M}}\sum_{\hat{L}}\sum_{\hat{M}_L'} (-i)^{\hat{L}'}\delta_{\hat{L}\hat{L}'}\, \mathcal{Y}^{\hat{L}S^*}_{\hat{J}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}'})\, j_L(qr') \left(\begin{matrix}\hat{J}\\ \hat{M}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\hat{L}'\,S\\ \hat{M}_L'\,M_S\end{matrix}\right)\langle{}^{T}_{T_3}|$$

4.3.15

$$= \sum_{JM}\sum_{LS}\sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})|{}^{T}_{T_3}\rangle \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2 \frac{1}{2} j_L(qr)\, j_L(qr')\Big(\big(\lambda^{\infty^{-1}} - \Sigma(\rho_+; E - \frac{\rho_-^2}{2m} + \mu)\big)^{-1}$$

$$+ (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big)\langle{}^{T}_{T_3}| \mathcal{Y}^{LS^*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$- \sum_{JM}\sum_{LS}\sum_{TT_3}\sum_{M_S M_L'}\sum_{\hat{J}\hat{M}}\sum_{\hat{L}} i^{L-L'}\, \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})|{}^{T}_{T_3}\rangle \left(\begin{matrix}J\\ M\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L\,S\\ M_L'\,M_S\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\hat{J}\\ \hat{M}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\hat{L}\,S\\ M_L'\,M_S\end{matrix}\right)$$

$$\sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})}^{\infty} \sqrt{\frac{2\tilde{L}+1}{2L+1}} \left(\begin{matrix}\tilde{L}\,\hat{L}\\ 0\,M_L'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L\\ M_L'\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\tilde{L}\,\hat{L}\\ 0\,0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}L\\ 0\end{matrix}\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2\, j_L(qr)\, j_L(qr')\, \frac{1}{2} B_{\tilde{L}}(q,\rho)\Big(n(\rho_+)\big(\lambda^{\infty^{-1}} - \Sigma(\rho_+; \varepsilon_{\rho_+} - \mu)\big)^{-1}$$

$$+ (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big) \langle{}^{T}_{T_3}| \mathcal{Y}^{\hat{L}S^*}_{\hat{J}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$= \sum_{JM} \sum_{LS} \sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) |^{T}_{T_3}\rangle \Big(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, j_L(qr)\, j_L(qr')$$

4.3.16

$$\frac{1}{2}\Big(\big(\lambda^{00^{-1}}(q,\rho;E) - \Sigma(\rho_+; E - \frac{\rho^2}{2m} + \mu)\big)^{-1} + (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big)$$

$$- \sum_{\hat{J}\hat{M}} \sum_{\hat{L}} \sum_{M_S M_L'} \sum_{\tilde{L}\,(\text{gerade})}^{\infty} i^{L-\hat{L}} \sqrt{\frac{2\hat{L}+1}{2L+1}} \left(\begin{matrix} J \\ M \end{matrix}\middle| \begin{matrix} L\ S \\ M_L'\ M_S \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \hat{J} \\ \hat{M} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \hat{L}\ S \\ M_L'\ M_S \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} \tilde{L}\ \hat{L} \\ 0\ M_L' \end{matrix}\middle| \begin{matrix} L \\ M_L' \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \tilde{L}\ \hat{L} \\ 0\ 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} L \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, j_L(qr)\, j_L(qr')\, \frac{1}{2} B_{\tilde{L}}(q,\rho) \Big(\big(n(\rho_+) \big(\lambda^{00^{-1}}(q,\rho;E) - \Sigma(\rho_+ \cdot \hat{\varepsilon}_{\rho_+}$$

$$+ (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\big)\Big)$$

$$\langle^{T}_{T_3}|\, \mathcal{Y}^{\hat{L}S^*}_{\hat{J}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}'}) .$$

Für den Spezialfall $\tilde{L}=0$ $(L=\hat{L})$ vereinfacht sich der Ausdruck (4.3.16) zu

4.3.17

$$\langle \vec{r}|\, \Lambda^{(10)}\, |\vec{r}'\rangle = \sum_{JM} \sum_{LS} \sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) |^{T}_{T_3}\rangle \Big(\chi^{(1)}_L(r,r',\rho,E) + \chi^{(2)}_{L\,\tilde{L}=0}(r,r',\rho,E)\Big) \langle^{T}_{T_3}|\, \mathcal{Y}^{LS^*}_{JM}(\Omega$$

mit den Definitionen

4.3.18

$$\chi^{(1)}_L(r,r',\rho,E) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, j_L(qr)\, j_L(qr')\, \frac{1}{2} \Big(\big(\lambda^{00^{-1}}(q,\rho,E)$$

$$- \Sigma(\rho_+; E - \frac{\rho^2}{2m} + \mu)\big)^{-1} + (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big),$$

4.3.18'

$$\chi^{(2)}_{L,\tilde{L}=0}(r,r',\rho;E) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, j_L(qr)\, j_L(qr')\, \frac{1}{2} B_{\tilde{L}=0}(q,\rho)$$

$$\Big(n(\rho_+) \big(\lambda^{00^{-1}}(q,\rho;E) - \Sigma(\rho_+, \varepsilon_{\rho_+} - \mu)\big)^{-1} + (\rho_+ \rightleftharpoons \rho_-)\Big) .$$

Die Impulse $p^2_{\pm}$ ersetzen wir dabei wieder durch

$$\langle p^2_{\pm}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\ell^2 + q^2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\,\ell q & \text{in } \chi_L^{(1)} \\ \frac{1}{4}\ell^2 + q^2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\,\beta_0\,\ell q & \text{in } \chi_{L,\tilde{L}}^{(2)} . \end{cases} \qquad 4.3.19$$

Anzumerken bleibt, daß in (4.3.17) die sphärischen- durch die Riccati-Besselfunktionen ersetzt werden können, was auf

$$\langle \vec{r}\,|\,\Lambda^{(10)}\,|\,\vec{r}\,'\rangle = \sum_{\eta M}\ \sum_{LL'}\ \sum_{ST}\ \sum_{T_3} \delta_{LL'}\, \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}})\,|\,{}^{T}_{T_3}\rangle \frac{\langle \Lambda_L^{(10)}(r,r';E)\rangle_{cm}}{rr'} \langle {}^{T}_{T_3}\,|\,\mathcal{Y}^{L'S^*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}\,'}) \qquad 4.3.20$$

mit

$$\langle \Lambda_L^{(10)}(r,r';E)\rangle_{cm} := rr'\left(\chi_L^{(1)}(r',r,\ell;E) + \chi_{L,\tilde{L}}^{(2)}(r,r',\ell;E)\right) \qquad 4.3.21$$

führt (*).

Mithin können wir unmittelbar den $\Lambda^{(00)}$-Ausruck von (4.2.5) mit dem Ergebnis (4.3.20) vergleichen. Man stellt leicht fest, daß (4.3.20-21) für $\Sigma\equiv 0$, $n(p)\equiv 0$ in den $\Lambda^{(00)}$-Propagator übergeht. Im Unterschied zum $\Lambda^{(00)}$-Propagator muß $\Lambda^{(10)}$ numerisch integriert werden, wobei als obere Integrationsgrenze in (4.3.18-18') ein Wert $\varkappa = 10\ k_F$ ausreicht (FF72,BG58).

Die Restabschätzung $\int_{\varkappa}^{\infty} dq$ läßt sich bis auf die Berechnung des Integralsinus exakt angeben (AS68).

Falls wir (4.3.21) in der Form

$$\langle \Lambda_L^{(10)}(r,r',E)\rangle_{cm} = \frac{1}{\pi}\Big\{\int_0^{\varkappa} dq\ \varphi_L(qr)\,\varphi_L(qr')\Big\{\Big(\big(\lambda^{00\,-1}(q,\ell;E) - \Sigma\big(\langle p_+\rangle;E - \tfrac{\langle p_-^2\rangle}{2m} + \mu\big)\big)^{-1} - \beta_0(q,\ell)\ n(\langle p_+\rangle)\big(\lambda^{00\,-1}(q,\ell;E) - \Sigma(\langle p_+\rangle;\ \varepsilon_{\langle p_+\rangle} - \mu)\big)^{-1}\Big) + (\langle p_+\rangle \rightleftarrows \langle p_-\rangle)\Big\} - 2\,rr'\,\left(\tfrac{\hbar^2}{m}\right)^{-1}\ {}_L R_{\varkappa}^{\infty}(r,r')\Big\} \qquad 4.3.22$$

(*) Sphärische- ($j_L(x)$) und Riccati-Besselfunktionen $\varphi_L(x)$ genügen der Beziehung $\varphi_L(x) = x j_L(x)$ (NE66,JO75).

schreiben, lautet das Integral der Restabschätzung

$$ {}_L R^{\varkappa}_{\varkappa}(r,r') := \int_{\varkappa}^{\infty} dk\, j_L'(kr)\, j_L(kr') , \qquad (\varkappa = 10\, k_F) . \tag{4.3.23} $$

Die Ausdrücke dafür ($L \leqslant 2$) entnehmen wir dem Anhang A.4.
Eine etwas vereinfachte Version des $\Lambda^{(10)}$-Propagators in (4.3.22) erhält man, wenn die untere Integrationsgrenze durch den Fermiimpuls ersetzt wird. Dadurch entfällt der Term mit der Θ-Funktion in Gleichung (3.3.5), was die numerische Behandlung des Problems etwas vereinfacht. Wir wollen uns aus diesem Grund zunächst davon überzeugen, daß die Näherung (3.3.6), auf der unser Vorgehen gründet, gilt(*).
Wir beginnen mit der Taylorentwicklung des off-shell Massenoperators $\Sigma(k_1; E-2^{-1}k_2^2+\mu)$ um den on-shell Wert $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_{k_2} = \hat{\varepsilon}(k_2)-\mu$:

$$ \Sigma\left(k_1;\, E-\frac{k_2^2}{2m}+\mu\right) \approx \Sigma(k_1;\hat{\varepsilon}_{k_1}) + (\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{k_1}) \left.\frac{\partial \Sigma(k_1;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\hat{\varepsilon}_{k_1}} + \dots . \tag{4.3.24} $$

Einsetzen von (4.3.24) in (3.3.5) liefert nach einigen algebraischen Umformungen den Ausdruck (3.3.6) von Kapitel 3.
Physikalisch tragen wir mit der Näherung $\Lambda^{(10)}(p_1,p_2;E)\equiv 0 \;\forall\, p_1,p_2<p$ dem Pauliprinzip im Sinne von Brueckner Rechnung.
In dem Propagatorintegral (4.3.22) haben wir mithin, was einem expliziten Paulioperator in (3.3.5) gleichkommt, im Integranden zusätzlich die winkelgemittelte Θ-Funktion $\langle\Theta(p_+-p_F)\,\Theta(p_--p_F)\rangle_{x=\cos}$ $(|2^{-1}\vec{P}\pm\vec{q}|>p_F)$ zu berücksichtigen, die sich mit analogen Argumenten

---

(*) Die Selbstenergie Σ ist eine relativ glatte Funktion der Energie ε , so daß via (3.3.6) der $\Lambda^{(10)}$-Propagator das Pauliprinzip näherungsweise berücksichtigt.

wie zu Beginn des Kapitels, für den Fall $|2^{-1}\vec{p}\pm\vec{q}|<p_F$, finden läßt (LM63). Im einzelnen ergibt sich

$$\langle \theta(p_+ - p_F)\,\theta(p_- - p_F)\rangle_{co} = \sum_{\substack{L \\ (gerade)}} \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\; A_L(q,\ell)\; Y_{L0}(\vartheta)\,, \qquad 4.3.25$$

wobei wir uns wieder auf Terme mit L=0

4.3.26

$$A_0(q,\ell<2p_F) = \begin{cases} 0 & \forall\, q,\ell \quad \sqrt{q^2+\frac{1}{4}\ell^2} < p_F \\ 1 & \forall\, q,\ell \quad q-\frac{1}{2}\ell > p_F \\ (q^2+\frac{1}{4}\ell^2-p_F^2)(q\ell)^{-1} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$A_0(q,\ell>2p_F) = \begin{cases} 1 & \forall\, q,\ell \quad |q-\frac{1}{2}\ell| > p_F \\ (q^2+\frac{1}{4}\ell^2-p_F^2)(q\ell)^{-1} & \text{sonst} \end{cases} \qquad 4.3.26'$$

beschränken (LM63,JLM74).

Damit geht die Relation (4.3.22) über in

4.3.27

$$\langle \Lambda_L^{\mu\nu}(t,t',E)\rangle_{co} = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^\infty dq\; \varphi_L(qt)\,\varphi_L(qt')\; A_0(q,\ell;$$

$$\Big(\big(\lambda^{00\,-1}(q,\ell;E) - \Sigma(\langle p_+\rangle;\, E-\frac{\langle p^2\rangle}{2m}+\mu)\big)^{-1}$$

$$+(\langle p_+\rangle \rightleftarrows \langle p_-\rangle)\Big)$$

$$-2tt'\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{-1} {}_L R_\varkappa^\infty(t,t')\Big)\,.$$

Schließlich lauten die winkelgemittelten Impulse $\langle p_{\pm}^2 \rangle$ in (4.3.27) in Analogie zur Beziehung (4.3.9)

$$\langle p_{\pm}^2 \rangle = 4^{-1}P^2 + q^2 \pm 3^{(-1/2)} A_0(q,P)\, q\, P. \qquad 4.3.28$$

Abschließend sei noch auf die Arbeit von Ho-Kim und Khanna (HK74) verwiesen, die bei der Behandlung der $\Lambda^{(00)}$-Gleichungen in den $\Lambda^{(00)}$-Propagator einen expliziten Paulioperator eingeführt haben, der die intermediären Streuzustände auf unbesetzte Niveaus überhalb der Fermikante beschränkt. Die genannten Autoren verwendeten die damit erhaltenen Resultate (z.B. Einteilchenenergien, Dichteverteilung der Einteilchenzustände) als Eingabewerte für eine selbstkonsistente $\Lambda^{(11)}$-Rechnung. In der vorliegenden Arbeit werden außer der $\Lambda^{(00)}$- auch die mit dem modifizierten $\Lambda^{(10)}$-Propagator berechneten Ergebnisse als Startwerte für die $\Lambda^{(11)}$-Rechnung benutzt.

4.4 Multipolentwicklung und Raumwinkelmittelung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Darstellung der Matrixelemente $\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)} | \vec{r}\,' \rangle$ im Impulsraum. Dazu gehen wir ähnlich vor wie in den vorausgegangenen Abschnitten.
Mit den Definitionen der ebenen Welle und des $\mathbb{1}$-Operators von oben lautet der Propagator von (3.3.8) in Verbindung mit (3.3.12)

4.4.1

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(E) | \vec{r}\,' \rangle = \sum_{SH_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{q}\, \langle \vec{r} | \vec{q}\, {}^{S\,T}_{H_S T_3} \rangle \frac{N(\vec{q},\vec{P})}{E + 2\mu - \varepsilon(P_+) - \varepsilon(P_-) + \frac{i}{2}(\gamma(P_+) + \gamma(P_-))} \langle \vec{r}\,' | \vec{q}\, {}^{S\,T}_{H_S T_3} \rangle$$

$$(\vec{P}_{\pm} := \tfrac{1}{2}\vec{P} \pm \vec{q}\,, \quad \hat{\varepsilon}_P = \varepsilon_P - \mu\,).$$

Einsetzen der freien Zustände $\langle \vec{r} | \vec{q}\, {}^{S\ T}_{M_S\ T_3} \rangle$ von (4.1.5) führt (4.4.1) über in

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(E) | \vec{r}\,' \rangle = \sum_{S M_S} \sum_{T T_3} \int_0^\infty dq\, q^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}} \qquad 4.4.2$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{M_L'} \delta_{LL'}\, i^{L'}\, Y^*_{L M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\, j_L(qr) \left({}^{\eta}_{M} \middle| {}^{L'\ S}_{M_L' M_S} \right) \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) \,|\, {}^{T}_{T_3} \rangle$$

$$N(\vec{q}, \vec{P}) \left(E - \hat{\varepsilon}_{P_+} - \hat{\varepsilon}_{P_-} + \frac{i}{2}(\gamma_{P_+} + \gamma_{P_-}) \right)^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\hat{\eta}\hat{M}} \sum_{\hat{L}\hat{L}'} \sum_{\hat{M}_L'} \delta_{\hat{L}\hat{L}'}\, i^{-\hat{L}'}\, Y_{\hat{L}'\hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})\, j_{\hat{L}}(qr') \left({}^{\hat{\eta}}_{\hat{M}} \middle| {}^{\hat{L}'\ S}_{\hat{M}_L'\ M_S} \right) \langle {}^{T}_{T_3} | \mathcal{Y}^{\hat{L}S\,*}_{\hat{\eta}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}\,'})$$

Analog zu oben spalten wir die Ausdrücke, die von der Raumwinkelintegration über $d\Omega_{\vec{q}}$ abhängen, nämlich

$$A_\Omega = \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}} \quad N(\vec{q}, \vec{P}) \left(E - \hat{\varepsilon}_{P_+} - \hat{\varepsilon}_{P_-} + \frac{i}{2}(\gamma(P_+) + \gamma(P_-)) \right)^{-1} \qquad 4.4.3$$

$$Y^*_{L' M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\, Y_{\hat{L}' \hat{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}})$$

ab und entwickeln den Pauliprojektor $N(\vec{q},\vec{P})$ wieder nach Legendre-Polynomen (WEI66). Dies führt auf

$$N(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_{L=0}^{\infty} N_L(q,P)\, P_L(x) \qquad 4.4.4$$

$$= \sum_{L=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, N_L(q,P)\, Y_{L0}(\Omega_{\vec{q}}) \qquad 4.4.4'$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$N_L(q,P) = \frac{2L+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx\, P_L(x)\, N(\vec{q}, \vec{P}) \,. \qquad 4.4.5$$

Zur Legendreentwicklung von $N(\vec{q},\vec{P})$ in (4.4.4) sei an die in Abschnitt 4.3 erwähnten Symmetrien erinnert. Die Entwicklungskoeffizienten $N_L(q,P)$ berechnen sich nach (4.4.5) durch

4.4.6

$$N_L(q,P) = \frac{2L+1}{2}\Big\{\theta\left(\frac{P^2}{4}+q^2-P_F^2\right)\Big[\theta\left(\left|q-\frac{P}{2}\right|-P_F\right)\int_{-1}^{+1} P_L(x)\,dx$$

$$+\,\theta\left(P_F-\left|q-\frac{P}{2}\right|\right)\int_{x_2=-x_1}^{x_1} P_L(x)\,dx\Big]$$

$$\theta\left(P_F^2-\frac{P^2}{4}-q^2\right)\Big[\theta\left(P_F-\left|\frac{P}{2}+q\right|\right)\int_{-1}^{+1} P_L(x)\,dx$$

$$+\,\theta\left(\left|\frac{P}{2}+q\right|-P_F\right)\int_{x_1}^{x_2=-x_1} P_L(x)\,dx\Big]\Big\}.$$

$$x_{1,2} := \pm\left(\frac{P^2}{4m}+q^2-P_F^2\right)/(Pq).$$

Anhand Gleichung (4.4.6) sehen wir explizit (vgl. (4.3.7) und (4.3.25)), daß $N_L(q,P)$ für ungerade L-Werte keinen Beitrag liefert, da in diesem Fall je über eine ungerade Funktion mit symmetrisch zum Ursprung liegenden Integrationsgrenzen zu integrieren ist. Damit reduziert sich die Summe über L in (4.4.4-4') auf gerade $L\in\mathbb{N}$.

Für L=0 ergibt (4.4.6) den Entwicklungskoeffizienten (WEI66)

4.4.7

$$N_0(q,P) = \theta\left(\frac{P^2}{4}+q^2-P_F^2\right)\Big\{\theta\left(\left|q-\frac{P}{2}\right|-P_F\right)+\theta\left(P_F-\left|q-\frac{P}{2}\right|\right)F(q,P)\Big\}$$

$$-\,\theta\left(P_F^2-\frac{P^2}{4}-q^2\right)\Big\{\theta\left(P_F-\left|\frac{P}{2}+q\right|\right)-\theta\left(\left|\frac{P}{2}+q\right|-P_F\right)F(q,P)\Big\}$$

$$\equiv \langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_{\Omega}$$

mit

$$F(q,P) := \left(\frac{P^2}{4} + q^2 - P_F^2\right)\left(P q\right)^{-1}. \qquad 4.4.8$$

Nachdem wir auf diese Weise die Winkelabhängigkeit der Funktion $N(\vec{q},\vec{P})$ eliminiert haben, wenden wir uns dem Produkt der Kugelflächenfunktionen in (4.4.2-3) zu; dieses wird mit Hilfe der Wignerschen 3-j Symbole umgeformt in (RO+59)

$$Y^*_{L' M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\, Y_{\tilde{L}' \tilde{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}}) = (-)^{M_L'}\, Y_{L',-M_L'}(\Omega_{\vec{q}})\, Y_{\tilde{L}' \tilde{M}_L'}(\Omega_{\vec{q}}) \qquad 4.4.9$$

$$= \sum_{\tilde{L}=|L'-\tilde{L}'|}^{L'+\tilde{L}'} \sum_{\tilde{M}_L=-\tilde{L}}^{+\tilde{L}} \sqrt{\frac{(2L'+1)(2\tilde{L}'+1)(2\tilde{L}+1)}{4\pi}} \qquad 4.4.10$$

$$\begin{pmatrix} L' & \tilde{L}' & \tilde{L} \\ -M_L' & \tilde{M}_L' & \tilde{M}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \tilde{L}' & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^*_{\tilde{L}\tilde{M}_L} (-)^{M_L'},$$

so daß die Hilfsgröße A_{Ω} von (4.4.3) übergeht in(*)

$$A_{\Omega} = \sum_{\substack{\tilde{L}=0 \\ (\text{gerade})}}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2\tilde{L}+1}}\, \langle N_L(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \left(E - \hat{\varepsilon}(P_{+x}) - \hat{\varepsilon}(P_{-x}) + \frac{i}{2}\left(\gamma(P_{+x}) + \gamma(P_{-x})\right)\right)^{-1} \qquad 4.4.11$$

$$\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}}\; Y_{\tilde{L}0}(\Omega_{\vec{q}})\, (-)^{M_L'} \sum_{\tilde{L}\tilde{M}_L} \sqrt{\frac{(2L'+1)(2\tilde{L}'+1)(2\tilde{L}+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} L' & \tilde{L}' & \tilde{L} \\ -M_L' & \tilde{M}_L' & \tilde{M}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \tilde{L}' & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^*_{\tilde{L}\tilde{M}_L}(\Omega_{\vec{q}}).$$

Im nächsten Schritt schreiben wir für (s. (4.4.2))

$$\sum_{M_S} \sum_{M_L'} \sum_{\tilde{M}_L'} \begin{pmatrix} \mu & L' & S \\ M & M_L' & M_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & \tilde{L}' & S \\ \tilde{M} & \tilde{M}_L' & M_S \end{pmatrix} = (-)^{L'-\tilde{L}'+M+\tilde{M}} \sqrt{(2\mu+1)(2\tilde{\mu}+1)} \qquad 4.4.12$$

$$\sum_{M_S} \sum_{M_L'} \sum_{\tilde{M}_L'} \begin{pmatrix} L' & S & \mu \\ M_L' & M_S & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}' & S & \tilde{\mu} \\ \tilde{M}_L' & M_S & -\tilde{M} \end{pmatrix}$$

(*) Der Kürze wegen notieren wir meist die Winkelmittelung über $x=\cos(\vartheta)$ nicht explizit, so daß statt $\langle\ \rangle_x$ nur $\langle\ \rangle$ geschrieben wird.

$\langle P_\pm^2\rangle = \frac{P^2}{4} + q^2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x\, q P$ (vgl. (4.3.19) und (4.3.28))

und setzen diese Umformung in (4.4.2) ein. Das Matrixelement $\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)} | \vec{r}\,' \rangle$ lautet damit

4.4.13

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)}_{\vec{E}}(E) | \vec{r}\,' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \delta_{LL'} \sum_{\hat{\eta}\hat{M}} \sum_{\hat{L}\hat{L}'} \delta_{\hat{L}\hat{L}'} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, i^{L'-\hat{L}'}\, j_L(qr)\, \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) \,|\, {}^{T}_{T_3} \rangle$$

$$\left\{ \sum_{\tilde{L}=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2\tilde{L}+1}}\, \langle N_{\tilde{L}}(q, \vec{P}) \rangle \left(E - \sum_{j=\pm} \left(\hat{\varepsilon}(\langle P_j \rangle) - \frac{i}{2} \gamma(\langle P_j \rangle) \right) \right)^{-1} \right.$$

$$\sum_{M_L'} \sum_{\hat{M}_L'} \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}}\, Y_{\tilde{L}0}(\Omega_{\vec{q}})\, (-)^{M_L'} \sum_{\tilde{L}\tilde{M}_L} \sqrt{\frac{(2L'+1)(2\hat{L}'+1)(2\tilde{L}+1)}{4\pi}}$$

$$\left. \begin{pmatrix} L' & \hat{L}' & \tilde{L} \\ -M_L' & \hat{M}_L' & \tilde{M}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \hat{L}' & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^*_{\tilde{L}\tilde{M}_L}(\Omega_{\vec{q}}) \right\}$$

$$j_{\tilde{L}}(qr') \quad (-)^{L'-\hat{L}'+M+\hat{M}+2S} \sqrt{(2\tilde{\eta}+1)(2\hat{\eta}+1)}$$

$$\sum_{M_S} \begin{pmatrix} L' & S & \eta \\ M_L' & M_S & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}' & S & \hat{\eta} \\ \hat{M}_L' & M_S & -\hat{M} \end{pmatrix} \mathcal{Y}^{\hat{L}S\,*}_{\hat{\eta}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}'}) \langle {}^{T}_{T_3} |$$

4.4.14

$$= \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \delta_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \sum_{\hat{\eta}\hat{M}} \sum_{\hat{L}\hat{L}'} \delta_{\hat{L}\hat{L}'} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2\, i^{L'-\hat{L}'}\, j_L(qr)\, \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) \,|\, {}^{T}_{T_3} \rangle$$

$$\left\{ \sum_{\tilde{L}=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2\tilde{L}+1}}\, \langle N_{\tilde{L}}(\vec{q}, \vec{E}) \rangle \left(E - \sum_{j=\pm} \left(\hat{\varepsilon}(\langle P_j \rangle) - \frac{i}{2} \gamma(\langle P_j \rangle) \right) \right)^{-1} \right.$$

$$\sum_{M_S} \sum_{M_L'} \sum_{\hat{M}_L'} (-)^{M_L'+L'+\hat{L}'+M+\hat{M}+2S} \sqrt{\frac{(2L'+1)(2\hat{L}'+1)(2\tilde{L}+1)}{4\pi}}$$

$$\sqrt{(2\tilde{\eta}+1)(2\hat{\eta}+1)} \begin{pmatrix} L' & \hat{L}' & \tilde{L} \\ -M_L' & \hat{M}_L' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & \hat{L}' & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & S & \eta \\ M_L' & M_S & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}' & S & \hat{\eta} \\ \hat{M}_L' & M_S & -\hat{M} \end{pmatrix}$$

$$j_{\tilde{L}}(qr') \quad \langle {}^{T}_{T_3} | \quad \mathcal{Y}^{\hat{L}S\,*}_{\hat{\eta}\hat{M}}(\Omega_{\vec{r}'}) \,.$$

Im Schritt von (4.4.13) nach (4.4.14) wurde die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen ausgenutzt. Mit Benutzung der Relation (RO+59)

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3} (-)^{l_1+l_2+l_3+m_1+m_2+m_3} \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix} \tag{4.4.15}$$

$$= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix},$$

wobei $\{\quad\}$ ein 6-j Symbol bedeutet, läßt sich nach einiger Rechnung das Matrixelement des $\Lambda^{(11)}$-Propagators kompakter schreiben. Man findet

$$\langle \vec{r} | \Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(E) | \vec{r}' \rangle = \sum_{\gamma\hat{\gamma}} \sum_{M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\hat{\gamma}M}(\Omega_{\vec{r}}) | {}^{T}_{T_3} \rangle \left(\Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(r, r', E) \right)^{\gamma\hat{\gamma}S}_{LL'} \xi_{LST} \xi_{L'ST} \langle {}^{T}_{T_3} | \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\hat{\gamma}M}(\Omega_{\vec{r}'}) \tag{4.4.16}$$

mit

$$\left(\Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(r, r'; E) \right)^{\gamma\hat{\gamma}S}_{LL'} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq\, q^2 \; i^{L'-L} \, j_L(qr)\, j_{L'}(qr') \tag{4.4.17}$$

$$(-)^{\hat{M}+L+L'} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2\gamma+1)(2\hat{\gamma}+1)}$$

$$\left[\sum_{\tilde{L}=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \gamma & \tilde{L} & \gamma \\ M & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\gamma} & \tilde{L} & \gamma \\ L & S & L' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L & L' & \tilde{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle N_{\tilde{L}}(\vec{q}, \vec{P}) \rangle \left(E - \sum_{j=\pm} \left(\hat{\tau}(\langle P_j \rangle) - \frac{i}{2} \gamma(\langle P_j \rangle) \right) \right)^{-1} \right]$$

Auf der Grundlage der bisher in Kapitel 4 durchgeführten Überlegungen wenden wir uns nun der zu lösenden Integralgleichung für die Streumatrix T zu.

4.5 Die off-shell Lippmann-Schwinger (OLS) Integralgleichung.

Die Gleichung für die Streumatrix T ist aus Kapitel 2 bekannt. Zur Berechnung von T führen wir die Wellenmatrix Ω via

$$T = 2\, V^{(a)} \Omega \qquad 4.5.1$$

ein (vgl. einleitende Bemerkungen zu diesem Kapitel).

Mithin genügt Ω nach Einsetzen in die Gleichung für die T-Matrix der Operatorengleichung

$$\Omega = \mathbb{1} + \overset{(ii)}{\Lambda}\, V^{(a)} \Omega \qquad 4.5.2$$

mit den Propagatoren $\overset{(ii)}{\Lambda}$ und der antisymmetrischen Wechselwirkung $V^{(a)}$, auf die wir im nächsten Kapitel eingehen werden.
Da für negative Energien die Inversion des $\Lambda^{(00)}$-Propagators (s. (3.2.1')) eindeutig ist, kann Gleichung (4.5.2) auch in der Form

$$\left(-\Lambda^{(00)^{-1}} + V^{(a)}\right)\Omega = -\Lambda^{(00)^{-1}} \qquad 4.5.3$$

geschrieben werden. Im weiteren wollen wir nun die Darstellung der Gleichungen (4.5.1-3) in der Multipolbasis angeben.
Wir beginnen mit Gleichung (4.5.1), die sich im Impulsraum unmittelbar in der Form

$$\langle \vec{p} | T | \vec{p}' \rangle = 2 \sum_{SM_S} \sum_{TT_3} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}\,' \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle | {}^{S\ T}_{M_S T_3} \rangle \langle {}^{S\ T}_{M_S T_3} | \langle \vec{r} | V^{(a)} | \vec{r}\,' \rangle \langle \vec{r}\,' | \Omega | \vec{p}\,' \rangle \qquad 4.5.4$$

ergibt. Das Matrixelement $\langle \vec{r} | V^{(a)} | \vec{r}\,' \rangle$ finden wir in (5.1.6), die ebene Welle $\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle$ in (4.1.1) und das Matrixelement der korrelierten

Zweiteilchen-Wellenfunktion $\langle \vec{r}\,'|\Omega|\vec{p}\,'\rangle$ in (4.1.9). Einsetzen führt nach einiger Rechnung durch Vergleich mit der Zerlegung(*)

4.5.6

$$\langle \vec{p}\,|\,T(E)\,|\vec{p}\,'\rangle = \sum_{\eta M}\sum_{LL'}\sum_{ST}\sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}})\,|\,{}^{T}_{T_3}\rangle \xi_{LST}\,\xi_{L'ST}\, T^{\eta ST}_{LL'}(p,p';E)\,\langle\,{}^{T}_{T_3}\,|\,\mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}\,'})$$

auf

4.5.7

$$T^{\eta ST}_{LL'}(p,p';E) = \frac{2}{\pi}\sum_{L''}\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tau'\,\tau^2\tau'^2\, i^{L'-L}\,\frac{\varphi_L(p\tau)}{p\tau}\; V^{\eta ST}_{LL''}(\tau')\;\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}$$

$$\frac{\delta(\tau-\tau')}{\tau\tau'}\;\frac{\psi^{\eta ST}_{L''L'}(\tau',p';E)}{\tau' p'}\,.$$

Die ψ-Funktion berechnen wir mit Gleichung (4.5.2) unter Verwendung des jeweiligen $\Lambda^{(ij)}$-Propagators, so daß in unserer Nomenklatur die Gleichung

4.5.8

$$\langle \vec{\tau}\,|\,\Omega\,|\,\vec{p}\,{}^{S\;T}_{M_S\;T_3}\rangle = \langle \vec{\tau}\,;\vec{p}\,{}^{S\;T}_{M_S\;T_3}\rangle$$

$$+\int d^3\vec{\tau}\,'\,d^3\vec{\tau}\,''\,\langle\vec{\tau}\,|\,\Lambda^{(i'j')}_{\vec{p}}(E)\,|\,\vec{\tau}\,'\rangle\langle\vec{\tau}\,';V^{(a)}|\,\vec{\tau}\,''\rangle\langle\vec{\tau}\,''|\,\Omega\,|\,\vec{p}\,{}^{S\;T}_{M_S\;T_3}\rangle$$

zu lösen ist.

Einsetzen der Zerlegung der freien Welle aus (4.1.5), des Propagators aus (4.2.4) und der Wechselwirkung aus (5.1.6) führt

---

(*) Für die T-Matrix wählen wir eine analoge (Multipol-) Entwicklung wie für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Der genaue Sachverhalt wird in Kapitel 5 diskutiert. Der Faktor ξ_{LST} ist definiert durch $\xi_{LST}:=(1-(-)^{L+S+T})/2$ (s. Kapitel 5).

Gleichung (4.5.8) nach einiger Rechnung über in die Integralgleichung

4.5.9

$$\psi^{\alpha ST}_{LL'}(r;p;E) = \delta_{LL'}\,\varphi_L(pr) + \sum_{L''}\int_0^\infty dr'\,\Lambda^{(ij)}_L(r,r';E)\,V^{\alpha ST}_{LL''}(r')\,\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}\,\psi^{\alpha ST}_{L''L'}(r';p;E)\,.$$

Darin steht φ_L für die bekannten Riccati-Besselfunktionen und $\psi^{\alpha}_{LL'}(r;p,E) = (rp)\,\Omega^{\alpha}_{LL'}(r;p,E)$. Die Faktoren ξ_{LST} und $\xi_{L''ST}$ haben die Werte 0 oder 1, jenachdem ob die Summe über die Quantenzahlen L,S,T bzw. L'',S,T gerade oder ungerade ist. Damit wird sichergestellt, daß nur solche Zweinukleonenzustände beitragen deren Wellenfunktion (bestehend aus Raum-, Spin- und Isospinanteil) antisymmetrisch ist (vgl. (5.1.4')). Die Matrixelemente der Wechselwirkung $V^{JST}_{LL'}$, diskutieren wir im folgenden Kapitel für das Hamada-Johnston-, das Reid-Soft-Core- und das Paris-Nukleon-Nukleon-Potential. Bei Verwendung von Potentialen mit Hard-Core sind sowohl die Integralgleichung für die ψ-Funktion als auch die Gleichung für die $T^{JST}_{LL'}$-Elemente zu modifizieren. Diesen Fall betrachten wir im Abschnitt 4.7.

4.6 Die off-shell Schrödinger-Gleichung (OSG).

Wir gehen von der Operatorengleichung (4.5.3) aus und schreiben diese in der Form

$$\int d^3\vec{r}'\,\langle\vec{r}|-\Lambda^{(00)^{-1}} + V^{(a)}|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\,\Omega\,|\vec{p}\,{}^{S\,T}_{M_S\,T_3}\rangle = \langle\vec{r}|-\Lambda^{(00)^{-1}}|\vec{p}\,{}^{S\,T}_{M_S\,T_3}\rangle\,. \qquad 4.6.1$$

Bis auf $\langle\vec{r}|\ -\Lambda^{(00)^{-1}}(E)|\vec{r}\,'\rangle$ sind in Gleichung (4.6.1) alle Terme bekannt. Nach Gleichung (3.3.1') gilt für $\Lambda^{(00)}$ in Kernmaterie ($\mu<0$)

$$\Lambda^{(00)}(E) = \left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu - h^{(rel)}\right)^{-1} \qquad 4.6.2$$

mit dem freien Hamiltonoperator $h^{(rel)}$ im Relativsystem beider Nukleonen. Mit

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}|h^{(rel)}|\vec{r}\,'\rangle &= -(2m_{red})^{-1}\,\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^{\,2}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad 4.6.3\\ &\equiv -\vec{\nabla}_{\vec{r}}^{\,2}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\end{aligned}$$

findet man leicht

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}|-\Lambda^{(00)^{-1}}(\beta)|\vec{P}\,{}^{S}_{M_S}\,{}^{T}_{T_3}\rangle &= \int d^3\vec{r}\,'\,\langle\vec{r}|-(\beta-h^{(rel)})|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\vec{P}\,{}^{S}_{M_S}\,{}^{T}_{T_3}\rangle \qquad 4.6.4\\ &= -(\beta+\vec{\nabla}_{\vec{r}}^{\,2})\langle\vec{r}|\vec{P}\,{}^{S}_{M_S}\,{}^{T}_{T_3}\rangle\\ &= -\left(\beta-\frac{\vec{P}^2}{m}\right)\langle\vec{r}|\vec{P}\,{}^{S}_{M_S}\,{}^{T}_{T_3}\rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}|-\Lambda^{(00)^{-1}}(\beta)|\vec{r}\,'\rangle &= -\langle\vec{r}|\beta-h^{(rel)}|\vec{r}\,'\rangle \qquad 4.6.5\\ &= -(\beta+\vec{\nabla}_{\vec{r}}^{\,2})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\\ &= -\left(\beta+\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r-\frac{\vec{L}^2}{r^2}\right)\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'),\end{aligned}$$

$$-\gamma^2 \equiv \beta := \left(E-\frac{\vec{P}^2}{4m}+2\mu\right), \qquad 4.6.5'$$

so daß (mit $\mathbb{1} = \sum_{\xi M}\sum_{LL'}\delta_{LL'}\sum_{ST}\sum_{T_3}|{}^{M}_{M}\,{}^{L}_{L}\,{}^{S}_{S}\,{}^{T}_{T_3}\rangle\langle{}^{M}_{M}\,{}^{L'}_{L'}\,{}^{S}_{S}\,{}^{T}_{T_3}|$) sich

$$\langle \vec{r} | - \Lambda^{(00)^{-1}}(\beta)\, \mathbb{1} | \vec{r}\,' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \delta_{LL'}\, \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) | {}^{T}_{T_3} \rangle\, \xi_{LST} \qquad 4.6.6$$

$$\left(-\beta - \frac{1}{m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \frac{\delta(r-r')}{r r'}$$

$$\langle {}^{T}_{T_3} | \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}\,'})$$

ergibt.

Mithin lautet die differentielle Form der Ψ-Gleichung (OSG)

$$\sum_{L''} \left\{ \left(\frac{d^2}{dr^2} + m\beta - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \delta_{LL''} - V^{\eta ST}_{L'L''}(r) \right\} \xi_{L''ST}\, \xi_{LST}\, \psi^{\eta ST}_{L''L'}(r, p, \beta) \qquad 4.6.7$$

$$= \delta_{LL'}\, \varphi_L(pr)\, (m\beta - p^2).$$

Diese Gleichung wurde in der Arbeit zu Kontrollzwecken bei der numerischen Behandlung des Paris-Potentials verwendet. Die Ähnlichkeit mit der "gewöhnlichen" Schrödinger-Gleichung ist offensichtlich. Man sieht, daß der inhomogene Term der Differentialgleichung gerade für den "on-shell" Energiewert $\beta = p^2/m$ verschwindet.

Auf die Inhomogenität von (4.6.7) werden wir im folgenden Abschnitt zurückkommen.

4.7 Behandlung des Streuproblems bei Hard-Core-Potentialen.

Zum Abschluß des Kapitels betrachten wir die Umformulierung der Streugleichung zweier Nukleonen (4.5.9) und der Gleichung für die $T^{JST}_{LL'}$-Elemente. Im Fall des Hard-Core-Potentials $V(r)=\infty$ für $r<c$ wissen wir, daß die korrelierte Wellenfunktion in diesem Bereich notwendig identisch verschwinden muß - wogegen das Produkt "$V(r)\,\psi(r)$" einen endlichen (unbestimmten) Wert annimmt. Zur Lösung des Problems gehen wir von der Differentialgleichung (4.6.7) aus und wählen für den Integranden im Bereich des Hard-Core ($\psi(r<c)=0$) folgenden Ansatz (BG58):

$$\sum_{L''} V^{\eta ST}_{LL''}(r)\,\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}\,\psi^{\eta ST}_{L''L'}(r;p;\beta) = \begin{cases} -\delta_{LL'}\,\varphi_L(pr)\,(m\beta-p^2) =: f^{\eta ST}_{LL'}(r;p;\beta) & \forall\, r<c \\ \lambda^{\eta ST}_{LL'}\,\delta(r-c) & \forall\, r\to c_+ \,. \end{cases} \qquad 4.7.1$$

Im nächsten Schritt setzen wir (4.7.1) in (4.5.9) ein und schreiben für die Integration $\int_0^\infty = \int_0^{c_-} + \int_{c_-}^{c_+} + \int_{c_+}^\infty$. Die Bedingung $\psi^{JST}_{LL'}(c;p,\beta)=0$ legt im Anschluß daran den Wert $\lambda^{JST}_{LL'}$ eindeutig fest.

Der resultierende Wert für $\lambda^{JST}_{LL'}$ $(w^2:=-\beta)$,

$$\lambda^{\eta ST}_{LL'} = -\Big(\varphi_L(pc)\,\delta_{LL'} + \int_0^c d\tau'\,\Lambda_L(c,\tau';w)\,f^{\eta ST}_{LL'}(\tau';p,w) \qquad 4.7.2$$

$$+ \sum_{L''}\int_c^\infty d\tau'\,\Lambda_L(c,\tau';w)\,V^{\eta ST}_{LL''}(\tau')\,\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}\,\psi^{\eta ST}_{L''L'}(\tau';p;w)\Big)\,\Lambda_L^{-1}(c,c;w)\,,$$

führt auf eine modifizierte Form der Gleichung (4.5.9), die die Gestalt

$$\psi_{LL'}^{\phi ST}(r;\rho;w) = \delta_{LL'}\ \hat{\varphi}_L(\rho,r) \qquad 4.7.3$$

$$+ \sum_{L''} \int_c^\infty dr'\, \hat{\Lambda}_L(r,r';w)\ V_{LL''}^{\phi ST}(r')\ \xi_{lST}\ \xi_{l''ST}\ \psi_{L''L'}^{\phi ST}(r';\rho;w)$$

mit

$$\hat{\Lambda}_L(r,r';w) := \Lambda_L(r,r';w) - \Lambda(r,c;w)\,\Lambda_L(c,r';w)\ \Lambda_L^{-1}(c,c;w)\,, \qquad 4.7.4$$

$$\hat{\varphi}_L(\rho r) := \varphi_L(\rho r) - \varphi_L(\rho c)\ \Lambda_L(r,c;w)\ \Lambda_L^{-1}(c,c;w) \qquad 4.7.5$$

hat. Die so berechneten Propagatoren $\hat{\Lambda}_L$ genügen der Beziehung

$$\hat{\Lambda}(r,r';w) = 0 \quad \forall \quad r \gtrless c \ \wedge\ r' \gtrless c\,. \qquad 4.7.6$$

Für die Funktionen (4.7.4) und (4.7.5) findet man im einzelnen ($\varphi_{\gtrless} := wr_{\gtrless}$, $\varphi := wr$, $\varphi' := wr'$, $\varphi_c := wc$)

$$\hat{\Lambda}_0(r,r';w) = (2w)^{-1}\left(e^{-(\varphi-\varphi_c)}\ e^{-(\varphi'-\varphi_c)} - e^{-(\varphi_>-\varphi_c)} \right), \qquad 4.7.7$$

$$\hat{\Lambda}_1(r,r';w) = (2w)^{-1}\Big(\left(1+\tfrac{1}{\varphi}\right)\left(1-\tfrac{1}{\varphi_c}\right)\left(1+\tfrac{1}{\varphi_c}\right)^{-1}\left(1+\tfrac{1}{\varphi'}\right) e^{-(\varphi-\varphi_c)}\ e^{-(\varphi'-\varphi_c)} \qquad 4.7.8$$

$$-\left(1-\tfrac{1}{\varphi_c}\right)\left(1+\tfrac{1}{\varphi_>}\right) e^{-(\varphi_>-\varphi_c)} \Big),$$

$$\hat{\Lambda}_2(r,r';w) = (2w)^{-1}\left(1+\tfrac{3}{\varphi_>}+\tfrac{3}{\varphi_>^2}\right) \qquad 4.7.9$$

$$\Big[\left(1+\tfrac{3}{\varphi_c}+\tfrac{3}{\varphi_c^2}\right)\left(1-\tfrac{3}{\varphi_c}+\tfrac{3}{\varphi_c^2}\right)\left(1+\tfrac{3}{\varphi_c}+\tfrac{3}{\varphi_c^2}\right) e^{-(\varphi-\varphi_c)}\ e^{-(\varphi'-\varphi_c)}$$

$$-\left(1-\tfrac{3}{\varphi_c}+\tfrac{3}{\varphi_c^2}\right) e^{-(\varphi_>-\varphi_c)} \Big].$$

$$\hat{\varphi}_0(\rho r) = \varphi_0(\rho r) - \varphi_0(\rho c)\; e^{-(\varphi-\varphi_c)}, \qquad 4.7.10$$

$$\hat{\varphi}_1(\rho r) = \varphi_1(\rho r) - \varphi_1(\rho c)\left(1+\frac{1}{\varphi}\right)\left(1+\frac{1}{\varphi_c}\right)^{-1} e^{-(\varphi-\varphi_c)}, \qquad 4.7.11$$

$$\hat{\varphi}_2(\rho r) = \varphi_2(\rho r) - \varphi_2(\rho c)\left(1+\frac{3}{\varphi}+\frac{3}{\varphi^2}\right)\left(1+\frac{3}{\varphi_c}+\frac{3}{\varphi_c^2}\right) e^{-(\varphi-\varphi_c)}. \qquad 4.7.12$$

Der Ausdruck für den Direktterm der T-Matrix schließt sich durch Einsetzen des Ansatzes (4.7.1) in die Gleichung (4.5.7) in der Form

4.7.13

$$T_{LL'}^{\eta;T}(p,p';w) = \frac{2}{\pi}\Big\{ \delta_{LL'}\Big\{ -\varphi_L(pc)\,\varphi_L(p'c)\,(pp')^{-1}\,\Lambda_L^{-1}(c,c;w)$$

$$+\int_0^c dr\,\Big(\hat{\varphi}_L(r;p;w)\,\varphi_L(p'r)\,(pp')^{-1}\,(p'^2+w^2)\Big)$$

$$+\sum_{L''}\int_c^\infty dr\,\Big(i^{L'-L}\,\hat{\varphi}_L(r;p;w)\,(pp')^{-1}\,V_{LL''}^{\eta;T}(r)$$

$$\xi_{LST}\,\xi_{L''T}\,\psi_{L''L'}^{\eta;T}(r,p';w)\Big)\Big\}$$

an.

Abschließend sei noch bemerkt, daß (4.7.13) für L=L'=0 in den von R. Laughlin und L. Scott in (LS68) angegebenen Ausdruck übergeht (vgl. auch (KT69)).

5. Nukleon-Nukleon-Potentiale.

Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen haben wir die "phänomenologischen" Potentiale von Hamada-Johnston (Hard-Core-Potential) (HJ62) und von R.V. Reid (R68) und das mehr "realistische" Paris-Potential (L+80) gewählt. Im Detail werden wir die Potentiale in den folgenden Abschnitten betrachten. Zuvor sollen einige Eigenschaften eines nichtlokalen Nukleon-Nukleon-Potentials $V(\vec{r}_1,\vec{p}_1,\sigma_1,\tau_1;\vec{r}_2,\vec{p}_2,\sigma_2,\tau_2)\equiv V(1;2)$, das von den Orts-, Impuls-, Spin- und Isospinkoordinaten beider Nukleonen abhängt, betrachtet werden.

Nach der allgemeinen Erfahrung muß V(1;2) folgende Eigenschaften erfüllen (EW41,BS67,RS80): a) Hermitezität, b) Vertauschungsinvarianz bezüglich der Koordinaten 1 und 2, c) Translationsinvarianz, d) Galileiinvarianz, e) Invarianz gegen Drehungen im Raum, f) Invarianz gegen Drehungen im Isospinraum, g) Raumspiegelungsinvarianz, h) Bewegungsumkehrinvarianz (Zeitumkehrinv.).

Die Eigenschaften e), f) und g) sind äquivalent zu(*) $[H,\vec{J}]=0$, $[H,\vec{T}]=0$ und $[H,\pi]=0$. Mithin kommutiert V(1;2) mit $\vec{J}^2$, J_z, $\vec{T}^2$, T_3 und π . Die zu diesen Operatoren korrespondierenden Quantenzahlen J, M, T, T_3, π sind mithin gute Quantenzahlen.

Bei der Multipolentwicklung wählen wir, analog zu Fiset und Foster (FF72) und Sprung (SP72), die im Fall der Kernmaterie wichtigen Partialwellen ($L\leqslant 2$)

$$^1S_0,\ ^3S_1+^3D_1,\ ^1D_2,\ ^3D_2,\ ^3D_3,$$
$$^1P_1,\ ^3P_0,\ ^3P_1,\ ^3P_2.$$

Dabei sehen wir, daß im $^3S_1+^3D_1$-Kanal Zustände mit verschiedenen Relativbahndrehimpulsen (L=0 und L=2) gekoppelt sind.

(*) $\vec{J}$=Gesamtdrehimpuls, $\vec{T}$=Gesamtisospin, π=Paritätsoperator.

5.1 Tensorzerlegung und Fouriertransformation.

Der Gesamtspin $\vec{S}$ des Zweinukleonensystems koppelt sich aus den beiden Nukleonenspins $\vec{s}(i)$ $(i=1,2)$: $\vec{S}=\vec{s}(1)+\vec{s}(2)$.
Die Eigenzustände zu $\vec{S}^2$ und S_z ergeben sich nach den Regeln der Drehimpulsalgebra:

$$\left|{}^{S}_{M_S}\widehat{s(1)s(2)}\right\rangle = \sum_{M_{s(1)}}\sum_{M_{s(2)}} \left(\begin{matrix} s(1) & s(2) \\ M_{s(1)} & M_{s(2)}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} S \\ M_S\end{matrix}\right) \left|\begin{matrix} s(1) \\ M_{s(1)}\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} s(2) \\ M_{s(2)}\end{matrix}\right\rangle . \qquad 5.5.1$$

Für Fermionen mit Spin 1/2 besteht die Möglichkeit, zu einem Singlet (S=0)- oder zu einem Triplet (S=1)-Zustand zu koppeln.
Die Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ lauten

$$\left|{}^{J}_{M}\widehat{LS}\right\rangle = \sum_{M_L}\sum_{M_S} \left(\begin{matrix} L & S \\ M_L & M_S\end{matrix}\middle| \begin{matrix} J \\ M\end{matrix}\right) \left|\begin{matrix} L \\ M_L\end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} S \\ M_S\end{matrix}\right\rangle . \qquad 5.1.2$$

Im Ortsraum erhalten wir

$$\left\langle \Omega_{\vec{r}}\middle| {}^{J}_{M}\widehat{LS}\right\rangle \equiv \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) = \sum_{M_L}\sum_{M_S} \left(\begin{matrix} L & S \\ M_L & M_S\end{matrix}\middle| \begin{matrix} J \\ M\end{matrix}\right) Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}}) \left|\begin{matrix} S \\ M_S\end{matrix}\right\rangle \qquad 5.1.3$$

mit den Kugelflächenfunktionen $\left\langle \Omega_{\vec{r}}\middle|\begin{matrix} L \\ M_L\end{matrix}\right\rangle = Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}})$.

Die Entwicklung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung nach gemeinsamen Eigenfunktionen von Π, $\vec{S}^2$, $\vec{J}^2$, J_z, $\vec{T}^2$ und T_3 wird durch den Ansatz(*)

$$\langle \vec{r}\,| V |\, \vec{r}\,'\rangle = \sum_{JM}\sum_{LL'}\sum_{ST}\sum_{T_3} \left\langle \Omega_{\vec{r}}\middle| {}^{J}_{M}\widehat{LS}\,{}^{T}_{T_3}\right\rangle \overline{V}^{JST}_{LL'}(r,r') \left\langle {}^{T}_{T_3}\,{}^{J}_{M}\widehat{LS}\middle|\Omega_{\vec{r}\,'}\right\rangle \xi_{LST}\,\xi_{L'ST} \qquad 5.1.4$$

erfüllt.

(*) $\overline{V}^{JST}_{LL'}(r,r') = \left\langle {}^{J}_{M}\widehat{LS}\,{}^{T}_{T_3}\middle| V(r,r') \middle| {}^{J}_{M}\widehat{LS}\,{}^{T}_{T_3}\right\rangle$,

$\left\langle \Omega_{\vec{r}}\middle| {}^{J}_{M}\widehat{LS}\,{}^{T}_{T_3}\right\rangle = \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})\,\left|{}^{T}_{T_3}\right\rangle$.

Die beiden letzten Faktoren ξ_{LST} und $\xi_{L'ST}$ sorgen dafür, daß das Potential nur auf antisymmetrisierte Zweinukleonenzustände wirkt.

Sie sind durch $\xi_{LST} := (1 - (-)^{L+S+T}) / 2$ 5.1.4'

definiert.

Wegen der Tensorkraft kommutiert der Potentialoperator V nicht mehr mit $\vec{L}^2$ (z.B. Kopplung vom $^3S_1$- und $^3D_1$-Kanal beim Deuteron). Nur für S=0 ist auch L eine gute Quantenzahl.

Der Zweckmäßigkeit halber definieren wir den Isospinprojektionsoperator

$$\hat{P}_T := \sum_{T_3} |T_{T_3}\rangle \langle T_{T_3}| , \qquad 5.1.5$$

so daß (5.1.4) übergeht in

$$\langle \vec{r}|V|\vec{r}'\rangle = \sum_{JM} \sum_{LL'} \sum_{ST} Y^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}})\, \overline{V}^{JST}_{LL'}(r,r')\, Y^{L'S\,*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'})\, \xi_{LST}\, \xi_{L'ST}\, \hat{P}_T . \qquad 5.1.6$$

Per Definition gilt für lokale Potentiale

$$\overline{V}^{JST}_{LL'}(r,r') = \delta(r-r')(rr')^{-1}\, \overline{V}^{JST}_{LL'}(r') . \qquad 5.1.7$$

Die Transformation des Matrixelements $\langle\vec{r}|V|\vec{r}'\rangle$ in den Impulsraum erhalten wir durch Einschieben von $\mathbb{1}$-Operatoren in das Matrixelement $\langle\vec{k}|V|\vec{k}'\rangle$:

$$\langle \vec{k}|V|\vec{k}'\rangle = \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}'\, \langle\vec{k}|\vec{r}\rangle\, \langle\vec{r}|V|\vec{r}'\rangle \langle\vec{r}'|\vec{k}'\rangle . \qquad 5.1.8$$

Für die weitere Rechnung benutzen wir die Partialwellenentwicklung der ebenen Welle aus (4.1.2) und setzen für das Matrixelement $\langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle$ den Ausdruck (5.1.6) ein.
Damit lassen sich die beiden Raumwinkelintegrationen über $\Omega_{\vec{r}}$ und $\Omega_{\vec{r}\,'}$ ausführen, so daß unter Verwendung der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen und der Darstellung der Drehimpulsfunktionen im Impulsraum

$$\mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{k}}) = \sum_{M_L} \sum_{M_S} \left({L \atop M_L} {S \atop M_S} \middle| {\eta \atop M} \right) Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{k}}) \, |\hat{S}_{M_S}\rangle , \qquad 5.1.9$$

$$\mathcal{Y}^{LS\,+}_{\eta M}(\Omega_{\vec{k}'}) = \sum_{M_L} \sum_{M_S} \left({L \atop M_L} {S \atop M_S} \middle| {\eta \atop M} \right) Y^{*}_{LM_L}(\Omega_{\vec{k}'}) \, |\hat{S}_{M_S}\rangle^{+} \qquad 5.1.9'$$

das fouriertransformierte Matrixelement die Form

$$\langle \vec{k} | V | \vec{k}\,' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{T} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{k}}) \, \tilde{V}^{\eta ST}_{LL'}(k,k') \, \mathcal{Y}^{L'S\,+}_{\eta M}(\Omega_{\vec{k}'}) \, \xi_{LST} \, \xi_{L'ST} \, \hat{P}_T \qquad 5.1.10$$

mit(*)

$$\tilde{V}^{\eta ST}_{LL'}(k,k') := \frac{2}{\pi} \, i^{L'-L} \int_0^\infty \!\!\int_0^\infty dr\, dr' \, r^2 r'^2 \, \bar{V}^{\eta ST}_{LL'}(r,r') \, j_L(kr) \, j_{L'}(k'r') \qquad 5.1.11$$

annimmt.
Hieraus erhält man für lokale Potentiale (5.1.7) unmittelbar

$$\tilde{V}^{\eta ST}_{LL'}(k,k') = \frac{2}{\pi} \, i^{L'-L} \int_0^\infty dr \, r^2 \, \bar{V}^{\eta ST}_{LL'}(r) \, j_L(kr) \, j_{L'}(k'r) . \qquad 5.1.12$$

Mit diesen Vorbemerkungen betrachten wir nun die in der Arbeit gewählten Potentiale (HJ62,B68,BM69,EG72,IR72,ST75).

(*) Vgl. Fußnote aus Seite 52.

5.2 Das Hamada-Johnston-Potential.

Das Hamada-Johnston-Potential (HJ62,IR72,CK81) zählt zu der Klasse der lokalen energieunabhängigen Nukleon-Nukleon-Potentiale. Es besteht aus Zentral-, Tensor-, Spin-Bahn- und quadratischem Spin-Bahn Term. Die Abstoßung für Nukleon-Nukleon-Abstände $r \lesssim .8$ Fermi (RFL62) wird durch einen sogenannten "Hard-Core" c simuliert ($V(r) = \infty \ \forall \ r<c=.4854$ F).
Die Anpassung der Potentialparameter erfolgte hier, ebenso wie in 5.3 und 5.4 (im kurzreichweitigen Bereich) dadurch, daß die Potentiale u.a. folgende Beobachtungsgrößen richtig beschreiben:

i) Streuphasen und Mischungsparameter der Nukleon-Nukleon-Streuung, ii) Eigenschaften des Deuterons.

Wir beginnen mit dem von Hamada-Johnston gewählten Ansatz

$$V(r) = V_c(r) + V_T(r)\,\hat{\Omega}_T + V_{SO}(r)\,\hat{\Omega}_{SO} + V_{SO2}\,r\,\hat{\Omega}_{SO2} \qquad 5.2.1$$

mit den Operatoren:

i) Tensoroperator $\hat{\Omega}_T = 3(\hat{\vec{\sigma}}_1\cdot\vec{r})(\hat{\vec{\sigma}}_2\cdot\vec{r})\,r^{-2} - (\hat{\vec{\sigma}}_1\cdot\hat{\vec{\sigma}}_2)$ 5.2.2

($\hat{\vec{\sigma}}_i$=Spinoperator des Teilchens i; i=1,2),

ii) Spin-Bahn Operator $\hat{\Omega}_{SO} = \hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$. 5.2.3

($\hat{\vec{L}}$=Operator des Relativbahndrehimpulses der beiden Nukleonen),

iii) quadratischer Spin-Bahn Operator

$$\hat{\vec{L}}_{SO2} = (\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2)\,\hat{\vec{L}}^2 - \tfrac{1}{2}\left((\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{L}})(\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \hat{\vec{L}}) + (\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \hat{\vec{L}})(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{L}})\right) \qquad 5.2.4$$

$$= (\delta_{L4} + \hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2)\,\hat{\vec{L}}^2 - (\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}})^2. \qquad 5.2.4'$$

Die radialabhängigen Potentialfunktionen lauten

$$V_c(x) = \varkappa\,(\hat{\vec{\tau}}_1 \cdot \hat{\vec{\tau}}_2)(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2)\; Y(x)\;(1 + a_c Y(x) + b_c Y^2(x)), \qquad 5.2.5$$

$$V_T(x) = \varkappa\,(\hat{\vec{\tau}}_1\;\hat{\vec{\tau}}_2)\; Z(x)\;(1 + a_T Y(x) + b_T Y^2(x)), \qquad 5.2.6$$

$$V_{SO}(x) = \mu_\pi G_{SO}\; Y^2(x)\;(1 + b_{SO} Y(x)), \qquad 5.2.7$$

$$V_{SO2}(x) = \mu_\pi G_{SO2}\; x^{-2}\; Z(x)\;(1 + a_{SO2} Y(x) + b_{SO2} Y^2(x)), \qquad 5.2.8$$

wobei(*) $x = \mu_\pi c r/\hbar = r/1.415$ (r in Fermi), 5.2.9

$\varkappa = .08\,\mu_\pi/3$, 5.2.9'

$$Y(x) = e^{-x}/x, \qquad 5.2.10$$

$$Z(x) = (1 + 3x^{-1} + 3x^{-2})\; Y(x) \qquad 5.2.11$$

und $\hat{\vec{\tau}}_i$ für den Isospinoperator steht.

Der Hard-Core-Radius c hat für alle vier Spin- Isospinzustände den gleichen Wert von c=.4853 F.

Für r<c gilt: $V_i(r) = \infty$, $i \in \{C, T, SO, SO2\}$. 5.2.12

(*) μ_π ist die Pionenmasse: $\mu_\pi = 139.4$ MeV.

Die Potentialparameter finden wir in Tabelle 2.

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die Matrixelemente $\langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle$ zu berechnen. Dazu gehen wir zurück zu den Gleichungen (5.1.6-7):

$$\langle \vec{r} | V | \vec{r}\,' \rangle = \sum_{\mathcal{H}M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \mathcal{Y}^{LS}_{\mathcal{H}M}(\Omega_{\vec{r}}) \, \frac{\delta(r-r')}{rr'} \, \overline{V}^{\mathcal{H}ST}_{LL'}(r') \, \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\mathcal{H}M}(\Omega_{\vec{r}\,'}) \, \xi_{LST} \xi_{L'ST} \, \hat{P}_T . \qquad 5.2.13$$

Mithin sind also die Matrixelemente $\overline{V}^{\mathcal{H}ST}_{LL'}(r') \equiv \langle {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} | V | {}^{T}_{T_3} {}^{\mathcal{H}}_{M} L'S \rangle$ (*) zu berechnen, die wir mit Hilfe der Eigenwertgleichungen

$$(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle = (2S(S+1) - 3) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle , \qquad 5.2.14$$

$$(\hat{\vec{\tau}}_1 \cdot \hat{\vec{\tau}}_2) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle = (2T(T+1) - 3) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle , \qquad 5.2.15$$

$$(\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle = \tfrac{1}{2} \left(\mathcal{H}(\mathcal{H}+1) - L(L+1) - S(S+1) \right) \, | {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} \rangle \qquad 5.2.16$$

finden.

Dies führt auf

$$\langle {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} | V_c | {}^{\mathcal{H}}_{M} L'S {}^{T}_{T_3} \rangle = \delta_{LL'} \, (2S(S+1) - 3) \, (2T(T+1) - 3) \, V_c^{*}(x) \qquad 5.2.17$$

mit

$$V_c(x) \equiv (\hat{\vec{\tau}}_1 \cdot \hat{\vec{\tau}}_2) \, (\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2) \, V_c^{*}(x) , \qquad 5.2.17'$$

$$\langle {}^{\mathcal{H}}_{M} LS {}^{T}_{T_3} | V_{so} \hat{\Omega}_{so} | {}^{\mathcal{H}}_{M} L'S {}^{T}_{T_3} \rangle = \delta_{LL'} \, \tfrac{1}{2} \left(\mathcal{H}(\mathcal{H}+1) - L(L+1) - S(S+1) \right) V_{so}(x) , \qquad 5.2.18$$

(*) Die Quantenzahlen JST werden häufig mit α abgekürzt.

$$\langle {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{LS}_{T_3}{}^{T} | V_{SO2}\, \hat{\vec{L}}_{SO2} | {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{L'S}_{T_3}{}^{T} \rangle = \Big(\big(\delta_{L\mathfrak{z}} + 2S(S+1) - 3 \big)\; L(L+1) - \tfrac{1}{4} \big(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}+1) - L(L+1) - S(S+1) \big)^2 \Big)\; V_{SO2}(x) \qquad 5.2.19$$

und die Tensoranteile, die für S=0 verschwinden; im Fall S=1 haben wir

$$\langle {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{LS}_{T_3}{}^{T} | V_T\, \hat{\Omega}_T | {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{L'S}_{T_3}{}^{T} \rangle = \Big\{ \delta_{L,\mathfrak{z}+1}\, \delta_{L',\mathfrak{z}+1}\, \frac{-(2T(T+1)-3)\;\; 2(\mathfrak{z}+2)}{2\mathfrak{z}+1} + \delta_{L,\mathfrak{z}-1}\, \delta_{L',\mathfrak{z}-1}\, \frac{-(2T(T+1)-3)\;\; 2(\mathfrak{z}-1)}{2\mathfrak{z}+1} + \delta_{\substack{L,\mathfrak{z}-1\\ \mathfrak{z}+1}}\, \delta_{\substack{L',\mathfrak{z}+1\\ \mathfrak{z}-1}}\, \frac{(2T(T+1)-3)\;\; 6\sqrt{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}+1)}}{2\mathfrak{z}+1} + \delta_{L,\mathfrak{z}}\, \delta_{L',\mathfrak{z}}\;\; 2(2T(T+1)-3) \Big\}\; V_T^{*}(x) \qquad 5.2.20$$

mit $V_T(x) = (\hat{\vec{\tau}}_1 \cdot \hat{\vec{\tau}}_2)\; V_T^{*}(x)$.

Anhand der Relationen (5.2.17-20) erhalten wir für die Potentialmatrixelemente $\overline{V}_{LL'}^{\mathfrak{z}ST}(x) = \langle {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{LS}_{T_3}{}^{T} | V | {}^{\mathfrak{z}}_{M}{}^{L'S}_{T_3}{}^{T} \rangle$ in der üblichen spektroskopischen Schreibweise die (ungekoppelten) Beiträge ($J \leq 2$)(*)

(*) $T^{JST}_{LL'}(p,p';E)$-Elemente wurden in (WI75) und (WGW76) für die Partialwellen ${}^1S_0$, ${}^1P_1$, ${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3D_2$ und ${}^3S_1 + {}^3D_1$ im Fall der Kernmaterie berechnet.

$$\bar{V}(^1S_0)=\bar{V}_{00}^{001}(x)=-3\ V_C^*\ (x), \qquad 5.2.21$$

$$\bar{V}(^1P_1)=\bar{V}_{11}^{100}(x)=\ 9\ V_C^*(x)\ -\ 4\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.22$$

$$\bar{V}(^3P_0)=\bar{V}_{11}^{011}(x)=\ V_C^*(x)\ -\ 4\ V_T^*(x)\ -\ 2\ V_{SO}(x)\ -\ 2\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.23$$

$$\bar{V}(^3P_1)=\bar{V}_{11}^{111}(x)=\ V_C^*(x)\ +\ 2\ V_T^*(x)\ -\ V_{SO}(x)\ +\ 3\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.24$$

$$\bar{V}(^3P_2)=\bar{V}_{11}^{211}(x)=\ V_C^*(x)\ -\ (2/5)\ V_T^*(x)\ +\ V_{SO}(x)\ +\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.25$$

$$\bar{V}(^1D_2)=\bar{V}_{22}^{201}(x)=-3\ V_C^*(x)\ -\ 12\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.26$$

$$\bar{V}(^3D_2)=\bar{V}_{22}^{210}(x)=-3\ V_C^*(x)\ -\ 6\ V_T^*(x)\ -\ V_{SO}(x)\ +\ 11\ V_{SO2}(x), \qquad 5.2.27$$

$$\bar{V}(^3D_3)=\bar{V}_{22}^{310}(x)=-3\ V_C^*(x)\ +\ (12/7)\ V_T^*(x)\ +\ 2\ V_{SO}(x)\ +\ 2\ V_{SO2}(x) \qquad 5.2.28$$

und im Spin-Triplet Isospin-Singlet Fall den (via Tensoroperator) gekoppelten $^3S_1+^3D_1$-Kanal mit den Matrixelementen

$$\bar{V}(^3S_1+^3D_1)=\bar{V}_{00}^{110}(x)=-3\ V_C^*(x), \qquad 5.2.29$$

$$\bar{V}(^3S_1+^3D_1)=\bar{V}_{02}^{110}(x)=\ 6\ (2^{1/2})\ V_T^*(x), \qquad 5.2.30$$

$$\bar{V}(^3S_1+^3D_1)=\bar{V}_{22}^{110}(x)=\ \bar{V}_{00}^{110}(x)\ +\ 6\ V_T^*(x)\ -\ 3\ V_{SO}(x)\ -\ 3\ V_{SO2}(x). \qquad 5.2.31$$

5.3 Das Reid-Soft-Core-Potential.

Wir diskutieren in diesem Abschnitt das Potential von Reid(*) (R68,CK81), das für jeden Satz von Partialwellen getrennt konstruiert wurde. Dieses Verfahren hat den technischen Vorteil, daß die Potentiale zu jedem Satz von Quantenzahlen unabhängig voneinander angepaßt werden können. Die Zahl der Parameter wird einerseits dadurch eingeschränkt, daß der OPEP-Term und die Reichweiten des Potentials in allen Partialwellen gleich genommen werden, als auch durch die begrenzte Anzahl der betrachteten Partialwellen ($J \leqslant 2$).

Die Isospin T=1-Partialwellen des RSC-Potentials lauten (in MeV):

$$\overline{V}(^1S_0) = -h\, e^{-x}/x - 1650.6\, e^{-4x}/x + 6484.2\, e^{-7x}/x, \qquad 5.3.1$$

$$\overline{V}(^1D_2) = -h\, e^{-x}/x - 12.322\, e^{-2x}/x - 1112.6\, e^{-4x}/x + 6484.2\, e^{-7x}/x, \qquad 5.3.2$$

$$\overline{V}(^3P_0) = -h\, ((1+4/x+4/x^2)\, e^{-x} - (16/x+4/x^2)\, e^{-4x})/x + 27.133\, e^{-2x}/x - 790.74\, e^{-4x}/x + 20662\, e^{-7x}/x, \qquad 5.3.3$$

$$\overline{V}(^3P_1) = h\, ((1+2/x+2/x^2)\, e^{-x} - (8/x+2/x^2)\, e^{-4x})/x - 135.25\, e^{-2x}/x + 472.81\, e^{-3x}/x, \qquad 5.3.4$$

$$\overline{V}(^3P_2 + {}^3F_2) = V_C(x) + V_T(x)\, \hat{\Omega}_T + V_{SO}(x)\, \hat{\Omega}_{SO}\,, \qquad 5.3.5$$

wobei

(*) Dieses Potential gehört zur Klasse der semirealistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen.

$$V_C(x)=3^{-1}\ h\ e^{-x}/x - 933.48\ e^{-4x}/x + 4152.1\ e^{-6x}/x, \qquad 5.3.6$$

$$V_T(x)=h\ ((1/3+1/x+1/x^2)\ e^{-x} - (4/x+1/x^2)\ e^{-4x})/x - 34.925\ e^{-3x}/x, \qquad 5.3.7$$

$$V_{SO}(x)=-2074.1\ e^{-6x}/x. \qquad 5.3.8$$

In allen Partialwellen wurde

$$h=10.463\ \text{MeV},\ x=\mu r,\ \mu=.7\ F^{-1} \qquad 5.3.9$$

benutzt.

Für die T=0-Partialwellen lauten die Potentiale:

$$\overline{V}(^1P_1)=3\ h\ e^{-x}/x - 634.39\ e^{-2x}/x + 2163.4\ e^{-3x}/x, \qquad 5.3.10$$

$$\overline{V}(^3D_2)=-3\ h\ ((1+2/x+2/x^2)\ e^{-x} - (8/x+2/x^2)\ e^{-4x})/x - 220.12\ e^{-2x}/x + 871\ e^{-3x}/x, \qquad 5.3.11$$

$$\overline{V}(^3S_1+^3D_1)=V_C(x) + V_T(x)\ \hat{\Omega}_T + V_{SO}(x)\ \hat{\Omega}_{so}\ , \qquad 5.3.12$$

wobei

$$V_C(x)=-h\ e^{-x}/x + 105.468\ e^{-2x}/x - 3187.8\ e^{-4x}/x + 9924.3\ e^{-6x}/x, \qquad 5.3.13$$

$$V_T(x)=-h\ ((1+3/x+3/x^2)\ e^{-x} - (12/x+3/x^2)\ e^{-4x})/x + 351.77\ e^{-4x}/x - 1673.5\ e^{-6x}/x, \qquad 5.3.14$$

$$V_{SO}(x)=708.91\ e^{-4x}/x - 2713.1\ e^{-6x}/x. \qquad 5.3.14'$$

Eine Besonderheit des Reid-Soft-Core-Potentials ist, daß es neben dem OPEP-Term auch Terme enthält, die dem Austausch von Mesonen mit Massen von 2- bis 7 Pionenmassen entsprechen. Andererseits ist es - wie das Hamada-Johnston-Potential - in jeder Partialwelle impulsunabhängig.

Beide Wechselwirkungen zeigen ein anderes off-shell Verhalten als ein impulsabhängiges Potential, wie. z.B. das im nächsten Abschnitt behandelte Paris-Nukleon-Nukleon-Potential. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf eine Arbeit von R.E. Peierls, wo die Impulsabhängigkeit in phänomenologischen Potentialen untersucht wurde (PE60).

Die Matrixelemente $\langle {}^{\mu}_{M}LS\,{}^{T}_{T_3}|V({}^{2S+1}L_J)|{}^{\mu}_{M}L'S\,{}^{T}_{T_3}\rangle$ konstruieren wir wie im Abschnitt 5.2. Man findet:

$$(\bar{V}({}^1S_0))^{001}_{00} = \bar{V}({}^1S_0), \qquad 5.3.15$$

$$(\bar{V}({}^1P_1))^{100}_{11} = \bar{V}({}^1P_1), \qquad 5.3.16$$

$$(\bar{V}({}^3P_0))^{011}_{11} = \bar{V}({}^3P_0), \qquad 5.3.17$$

$$(\bar{V}({}^3P_1))^{111}_{11} = \bar{V}({}^3P_1), \qquad 5.3.18$$

$$(\bar{V}({}^3P_2))^{211}_{11} \approx V_C({}^3P_2) - (2/5)\ V_T({}^3P_2) + V_{SO}({}^3P_2)\ ^{(*)}, \qquad 5.3.19$$

(*) Siehe Anmerkung (**) zu Tabelle 1.
In diesem Fall hat man die Integralgleichungen (s. Kapitel 4) $\psi_{11} = \varphi_1 + \sum_{j=1,3} \int \Lambda_1 \bar{V}_{1j} \psi_{j1}$ und $\psi_{31} = \sum_{j=1,3} \int \Lambda_3 \bar{V}_{3j} \psi_{j1}$ zu lösen.

$$(\bar{V}(^1D_2))^{201}_{22} = \bar{V}(^1D_2), \qquad 5.3.20$$

$$(\bar{V}(^3D_2))^{210}_{22} = \bar{V}(^3D_2), \qquad 5.3.21$$

$$(\bar{V}(^3S_1+^3D_1))^{110}_{00} = V_C(x), \qquad 5.3.22$$

$$(\bar{V}(^3S_1+^3D_1))^{110}_{02} = 2\ (2^{1/2})\ V_T(x), \qquad 5.3.23$$

$$(\bar{V}(^3S_1+^3D_1))^{110}_{22} = V_C(x) - 2\ V_T(x) - 3\ V_{SO}(x). \qquad 5.3.24$$

5.4 Das Paris-Nukleon-Nukleon-Potential.

Als Vertreter aus der Klasse der impulsabhängigen Potentiale wählen wir das sog. Paris-Nukleon-Nukleon-Potential (L+80,CK81), dessen Parametrisierung auf einer diskreten Superposition von Yukawa-Termen ($e^{-m_j r}/(m_j r)$) basiert. Die starke Abstoßung im Potential für Relativabstände beider Nukleonen $r \lesssim .8$ F (short-range (SR) Anteil) wird durch einen Soft-Core phänomenologisch beschrieben. Der intermediäre (medium-range (MR) Anteil)- und der langreichweitige (LR) ($\pi+2\pi+\omega$-Austausch für $r \gtrsim .8$ F) Anteil des Potentials basieren auf mesonentheoretischen Überlegungen, während der kurzreichweitige Anteil angepaßt (Streuphasen, Eigenschaften des Deuterons) wurde. Der Grund dieser halbtheoretischen Potentialbeschreibung liegt in Prozessen wie z.B. Austausch von schweren Teilchen, Existenz von Resonanzen und/oder Effekten subhadronischer Konstituenten wie Quarks oder Gluonen, die den Zweinukleonen-Streuprozeß bei kleinen Abständen bestimmen und bis z. Zeit einer quantitativen Beschreibung entgegenstehen.

Die Energieabhängigkeit des PAR-Potentials macht einige zusätzliche Bemerkungen notwendig. Diese tritt in den Zentralanteilen der theoretischen LR+MR-Wechselwirkungen auf und ist in guter Näherung linear. In (VI79) wurde gezeigt, daß eine lineare Energieabhängigkeit in eine p^2-Abhängigkeit transformiert werden kann (siehe Ansatz (5.4.1) bzw. (5.4.7)). Die Darstellung des Potentials als eine diskrete Summe von Yukawatermen andererseits hat den Vorteil, daß dessen Verlauf sowohl im Orts- als auch im Impulsraum von relativ einfacher Gestalt ist.
Bevor wir uns nun mit der Wechselwirkung im Detail beschäftigen sei erwähnt, daß das im vorausgegangenen Abschnitt behandelte RSC-Potential, im Vergleich zur PAR-Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, einen wesentlich stärkeren Tensoranteil besitzt (AR81), dessen Stärke eine wichtige Rolle dabei spielt, daß Kernmaterie gerade bei der "empirischen" Dichte von $\varrho_0 = .17\ F^{-3}$ ($p_F = 1.36\ F^{-1}$) in den Sättigungszustand übergeht (SP72).

Nach diesen Bemerkungen betrachten wir die Parametrisierung des Potentials im Ortsraum für die Isospinwerte T=1 und T=0 in Termen der bereits oben definierten nichtrelativistischen Invarianten:

5.4.1

$$V(\vec{r}, p^2) = V_0(r, p^2)\ \hat{\Omega}_0 + V_1(r, p^2)\ \hat{\Omega}_1 + V_{SO}(r)\ \hat{\Omega}_{SO}$$

$$+ V_T(r)\ \hat{\Omega}_T + V_{SO2}(r)\ \hat{\Omega}_{SO2}$$

mit

5.4.2

$$\hat{\Omega}_0 = (1 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)/4 \ ,$$

$$\hat{\Omega}_1 = (3 + \hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2)/4 , \qquad 5.4.3$$

$$\hat{\Omega}_{SO} = \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} , \qquad 5.4.4$$

$$\hat{\Omega}_T = 3(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \vec{r})(\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \vec{r})\, r^{-2} - \hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2 , \qquad 5.4.5$$

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{SO2} &= \tfrac{1}{2}\left((\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{L}})(\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \hat{\vec{L}}) + (\hat{\vec{\sigma}}_2 \cdot \hat{\vec{L}})(\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{L}})\right) \\ &= (\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2)\, \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{L}}_{SO2} . \end{aligned} \qquad 5.4.6$$

Wie eingangs erwähnt enthalten die Zentralkomponenten V_0 und V_1 impulsabhängige Terme. Mithin sind V_0 und V_1 definiert durch

$$V_i(r;p^2) = V_i^a(r) + p^2/m\, V_i^b(r) + V_i^b(r)\, p^2/m \quad (i=0,1), \qquad 5.4.7$$

wobei

$$p^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{r^2}\right) \qquad 5.4.8$$

ist und die isospinabhängigen Nukleonenmassen die Werte

$$m_{T=1} = 938.2592 \text{ MeV}, \qquad 5.4.9$$

$$m_{T=0} = 938.9055 \text{ MeV} \quad \text{haben}^{(*)}. \qquad 5.4.9'$$

Für jede Komponente $V(r)$ in (5.4.1) und (5.4.7) wurde die folgende Parametrisierung verwendet:

(*) Aus der Konvention $\hbar^2/m=1$ resultieren die Umrechnungsfaktoren $\hbar^2/m|_{T=0}=41.4729$ MeV F^2 und $\hbar^2/m|_{T=1}=41.5015$ MeV F^2. (Mit $m_{T=0}$ wurden die Matrixelemente (5.2.13) berechnet. In der Lippmann-Schwinger-Gleichung wurde der Durchschnitt beider Werte verwendet.)

$$V(r) = \sum_{j=1}^{n} g_j \, F(m_j r) \, (m_j r)^{-1} \, e^{-m_j r} \quad (*) \qquad 5.4.10$$

mit $F(m_j r)=1$ für V_0^a, V_0^b, V_1^a und V_1^b, 5.4.11

$$F(m_j r)=(m_j r)^{-1} + (m_j r)^{-2} \text{ für } V_{SO}, \qquad 5.4.12$$

$$F(m_j r)=1 + 3\,(m_j r)^{-1} + 3\,(m_j r)^{-2} \text{ für } V_T \qquad 5.4.13$$

und

$$F(m_j r)=(m_j r)^{-2}\,(1+3(m_j r)^{-1}+3(m_j r)^{-2}) \text{ für } V_{SO2}. \qquad 5.4.14$$

Die Massen m_j sind für alle Komponenten gleich. Der erste Term ($j=1$) entspricht dem Ein-Pion-Austausch (OPE) und trägt nur in V_0, V_1 und V_T bei. Ferner ist das Potential am Ursprung $r=0$ regulär, weswegen die Parameter g_j die Relationen (L+80)

$$\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1} g_j = 0 \text{ für } V_{0,1}^a \text{ und } V_{0,1}^b, \qquad 5.4.15$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1} g_j = 0 \text{ und } \quad \sum_{j=1}^{n} m_j^{-3} g_j = 0 \text{ für } V_T \text{ und } V_{SO}, \qquad 5.4.16$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1} g_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} m_j^{-3} g_j = 0 \text{ und}$$
$$\sum_{j=1}^{n} m_j^{-5} g_j = 0 \text{ für } V_{SO2} \qquad 5.4.17$$

(*) In der Arbeit wurde bis $n=12$ summiert. Die Potentialparameter finden wir in Tabelle 3. Die Massenparameter m_j sind in F^{-1} und die Potentialparameter g_j in MeV gegeben. (Die Potentialparameter für $j>9$ müssen berechnet werden. Die Werte sind in Tabelle 3' angegeben.)

erfüllen müssen (vgl. dazu fehlende Werte in Tabelle 3).

Nach diesen Bemerkungen können wir zur Berechnung der Matrixelemente $V_{LL'}^{JST}(r)$ übergehen. Der Kürze halber spalten wir in (5.4.1) den impulsabhängigen Term durch die Definitionen

$$V_1(\vec{r};p^2) := \sum_{s=0}^{1} \left(\frac{p^2}{m} V_s^{b}(r) + V_s^{b}(r) \frac{p^2}{m} \right) \hat{\Omega}_s \qquad 5.4.18$$

und

$$V_2(\vec{r}) := \sum_{s=0}^{1} V_s^{0}(r) \hat{\Omega}_s + V_{so}(r) \hat{\Omega}_{so} + V_T(r) \hat{\Omega}_T + V_{so2}(r) \hat{\Omega}_{so2} \qquad 5.4.18'$$

ab, so daß

$$V(\vec{r},p^2) = V_1(\vec{r},p^2) + V_2(\vec{r}) . \qquad 5.4.19$$

Die Matrixelemente $(V_2(r))_{LL'}^{JST}$ erhalten wir mithin wie in den beiden vorausgegangenen Abschnitten, so daß im weiteren nur noch der Term $V_1(\vec{r};p^2)$ zur Diskussion steht.
Durch Fouriertransformation erhält man für das Matrixelement $\langle\vec{r}|V_1(\vec{r};p^2)|\vec{r}'\rangle$ die Beziehung

$$\langle\vec{r}|V_1(\vec{r},p^2)|\vec{r}'\rangle = \int d^3p \int d^3p' \langle\vec{r}|\vec{p}\rangle \langle\vec{p}|V_1(\vec{r},p^2)|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\vec{r}'\rangle , \qquad 5.4.20$$

woraus mit (5.1.10)

$$\langle\vec{p}|V_1(\vec{r};p^2)|\vec{p}'\rangle = \sum_{\eta M} \sum_{L'L''} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}_{\eta M}^{L'S}(\Omega_{\vec{p}})|{}^{T}_{T_3}\rangle \qquad 5.4.21$$

$$\tilde{V}_{L'L''}^{\eta ST}(p,p') \langle{}^{T}_{T_3}| \mathcal{Y}_{\eta M}^{L''S*}(\Omega_{\vec{p}'}) \xi_{L'ST} \xi_{L''S}$$

mit

$$\tilde{V}^{\alpha ST}_{L'L''}(p,p') = \frac{2}{\pi} i^{L''-L'} \int_0^\infty dx \; x^2 \; \overline{V}^{\alpha ST}_{L'L''}(x) \; j_{L'}(px) \; j_{L''}(p'x) \qquad 5.4.22$$

$$= \frac{2}{\pi} i^{L''-L'} \sum_{S=0}^{1} \int_0^\infty dx \; x^2 \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \Bigg\{ \Bigg\{ \left[\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}x - \frac{L'(L'+1)}{x^2}\right] V_S^b(x)$$

$$+ V_S^b(x) \left[\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}x - \frac{L'(L'+1)}{x^2}\right] \Bigg\}$$

$$j_{L'}(px) \; j_{L''}(p'x) \Bigg\} \varphi_S \; \delta_{L'L''}$$

folgt.

Für weitere Rechnungen halten wir die Beziehungen

$$h_L^0(r) := -\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r + \frac{L(L+1)}{r^2} , \qquad 5.4.23$$

$$h_L^0(r) \; j_L(pr) = p^2 \; j_L(pr) , \qquad 5.4.23'$$

$$\langle \vec{p} | V_S^b | \vec{p}' \rangle = \sum_{LM_L} Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}}) \; (\langle p | V_S^b | p' \rangle)_L \; Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}'}) \qquad 5.4.24$$

mit

$$(\langle p | V_S^b | p' \rangle)_L := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr \; r^2 \; V_S^b(r) \; j_L(pr) \; j_L(p'r) \equiv V_L(p,p') \qquad 5.4.24'$$

und die Definition der Hilfsgrößen

$$\varphi_0 := (1 - (2S(S+1) - 3)) / 4 , \qquad 5.4.25$$

$$\varphi_1 := (3 + (2S(S+1) - 3)) / 4 \qquad 5.4.25'$$

fest.

Damit schließen sich an (5.4.20), unter Benutzung von (5.1.9-9'), die Umformungen

$$\langle \vec{r} | V_1(\vec{r}, \rho^2) | \vec{r}' \rangle = \int_0^\infty d\rho \; \rho^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}} \int_0^\infty d\rho' \, \rho'^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}'} \qquad 5.4.26$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_L \sum_{M_L} i^L Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}}) \, j_L(\rho r) \, Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}})$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{\eta M} \sum_{L'L''} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{L'S}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}}) \, i^{L''-L'} \sum_{s=0}^{1} \int_0^\infty dx \, x^2$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \left\{ \left[\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} x - \frac{L'(L'+1)}{x^2} \right] V_s^b(x) + V_s^b(x) \left[\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} x - \frac{L'(L'+1)}{x^2} \right] \right\}$$

$$\mathcal{Y}^{L''S^*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}'}) \, | {}^{T}_{T_3} \rangle \langle {}^{T}_{T_3} | \; j_{L'}(\rho x) \, j_{L''}(\rho' x)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\underline{L}} \sum_{\underline{M_L}} i^{-\underline{L}} Y_{\underline{L}\,\underline{M_L}}(\Omega_{\vec{p}'}) \, j_{\underline{L}}(\rho' r') \, Y^*_{\underline{L}\,\underline{M_L}}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$= \int_0^\infty d\rho \, \rho^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}} \int_0^\infty d\rho' \, \rho'^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{LM_L} i^L Y^*_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}}) \, j_L(\rho r) \, Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{r}}) \qquad 5.4.26'$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{\eta M} \sum_{L'L''} \sum_{ST} \sum_{T_3} | {}^{T}_{T_3} \rangle \sum_{\underline{M_L}\,\underline{M_S}} \left({}^{L'\;S}_{\underline{M_L}\;\underline{M_S}} \middle| {}^{\eta}_{M} \right) Y_{L'\underline{M_L}}(\Omega_{\vec{p}}) \, | {}^{S}_{\underline{M_S}} \rangle$$

$$\sum_{s=0}^{1} \eta_s \int_0^\infty dx \, x^2 \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \left\{ \left[\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} x - \frac{L'(L'+1)}{x^2} \right] V_s^b(x) + V_s^b(x) \left[\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} x - \frac{L'(L'+1)}{x^2} \right] \right\}$$

$$j_{L'}(px)\, j_{L''}(p'x) \sum_{M_{L'} M_{S'}} \begin{pmatrix} L' & S \\ M_{L'} & M_{S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L \\ M \end{pmatrix} Y^{*}_{L'' M_{L'}}(\Omega_{\vec{p}'}) \langle {}^{S}_{M_{S'}} |$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\underline{L}\, \underline{M}_L} i^{-\underline{L}'} Y_{\underline{L}\, \underline{M}_L}(\Omega_{\vec{p}'})\, j_{\underline{L}}(p'r')\, Y^{*}_{\underline{L}\, \underline{M}_L}(\Omega_{\vec{r}'})$$

an.

Mit der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen $Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}'})$, der Darstellung der Drehimpulsfunktionen $\mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}})$ und $\mathcal{Y}^{L'S*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}'})$ von (5.1.3) und der Beziehung

5.4.27

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp\, p^2\, j_L(pr)\, j_L(pr') = \delta(r - r')\, (rr')^{-1}$$

für die Besselfunktionen j_L führen wir (5.4.26') über in

5.4.28

$$\langle \vec{r} |\, V_n(\vec{r}, p^2)\, | \vec{r}' \rangle =$$

$$\int_0^\infty dp\, p^2 \int_0^\infty dp'\, p'^2\, \frac{2}{\pi}\, \frac{2}{\pi} \sum_{\eta M} \sum_{LS} \sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}})\, j_L(pr)\, | {}^{T}_{T_3} \rangle$$

$$\sum_{s=0}^{1} \varphi_s \int_0^\infty dx\, x^2 \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \left\{ -h_L^{0}(x)\, V_s^{L}(x) - V_s^{L}(x)\, h_L^{0}(x) \right\} \langle {}^{T}_{T_3} |$$

$$j_L(px)\, j_L(p'x)\, j_L(p'r')\, \mathcal{Y}^{LS*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$= \sum_{JM} \sum_{LS} \sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) \, |{}^{T}_{T_3}\rangle \qquad 5.4.29$$

$$\sum_{s=0}^{1} \varphi_s \int_0^{\infty} dx \; x^2 \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \left\{ -h_L^0(x)\, V_s^b(x) - V_s^b(x)\, h_L^0(x) \right\} \frac{\delta(r'-x)}{r'x}$$

$$\langle {}^{T}_{T_3} | \; \mathcal{Y}^{LS\,*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$= \sum_{JM} \sum_{LS} \sum_{TT_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) \, |{}^{T}_{T_3}\rangle \qquad 5.4.30$$

$$\sum_{s=0}^{1} \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \varphi_s \left\{ \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L(L+1)}{r^2}\right] V_s^b(r) + V_s^b(r) \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L(L+1)}{r^2}\right. \right.$$

$$\frac{\delta(r-r')}{rr'} \; \langle {}^{T}_{T_3} | \; \mathcal{Y}^{LS\,*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'})$$

$$= \sum_{JM} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{JM}(\Omega_{\vec{r}}) \, |{}^{T}_{T_3}\rangle \; \frac{\delta(r-r')}{rr'} \qquad 5.4.31$$

$$\left\{ \delta_{LL'} \left(-\frac{\hbar^2}{m_T}\right) \sum_{s=0}^{1} \varphi_s \left\{ \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L(L+1)}{r^2}\right] V_s^b(r) + V_s^b(r) \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r - \frac{L(L+1)}{r^2}\right] \right\} \right.$$

$$\langle {}^{T}_{T_3} | \; \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{JM}(\Omega_{\vec{r}'}) .$$

Insgesamt erhält man für (5.4.1) wegen (5.4.18-18')

$$\langle \vec{r} | V(\vec{r}, \rho^2) | \vec{r}' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}}) | {}^{T}_{T_3} \rangle \qquad 5.4.32$$

$$\frac{\delta(r-r')}{rr'} \left\{ \left(V_1(r'; \rho^2) \right)^{\eta ST}_{LL'} + \left(V_2(r') \right)^{\eta ST}_{LL'} \right\}$$

$$\langle {}^{T}_{T_3} | \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{r}'})$$

mit

$$\left(V_1(r'; \rho^2) \right)^{\eta ST}_{LL'} := \delta_{LL'} \sum_{s=0}^{1} \varphi_s \left(-\frac{\hbar^2}{m_T} \right) \qquad 5.4.33$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{r'} \frac{d^2}{dr'^2} r' V_s^b(r') + V_s^b(r') \frac{1}{r'} \frac{d^2}{dr'^2} r' \right] - \frac{2L(L+1)}{r'^2} V_s^b(r') \right\},$$

$$5.4.33'$$

$$\left(V_2(r') \right)^{\eta ST}_{LL'} \equiv \overline{V}^{\eta ST}_{LL'}(r') .$$

Da wir $\hbar^2/m=1$ gesetzt haben, hat $(V_1(r';p^2))^{JST}_{LL'}$ die Einheit F^{-2}.

Die Matrixelemente lauten mit unserer Schreibweise der vorausgegangenen Abschnitte:

$$\overline{V}^{\eta ST}_{LL'}(r; \rho^2) = \delta_{LL'} \sum_{s=0}^{1} \varphi_s V_s^a(r) \qquad 5.4.34$$

$$+ \delta_{LL'} \sum_{s=0}^{1} \varphi_s \left\{ \left[-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r V_s^b(r) - V_s^b(r) \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \right] + 2 \frac{L(L+1)}{r^2} V_s^b(r) \right\}$$

$$+ \delta_{LL'} \frac{1}{2} \left\{ \eta(\eta+1) - L(L+1) - S(S+1) \right\} V_{S0}(r)$$

$$+ \delta_{LL'} \left\{ \frac{1}{4} \left[\eta(\eta+1) - L(L+1) - S(S+1) \right]^2 - \delta_{L\eta} L(L+1) \right\} V_{S02}(r)$$

$$+ \delta_{S,1} \left\{ 2 \delta_{LL'} \delta_{L\eta} - 2 \frac{\eta+2}{2\eta+1} \delta_{LL'} \delta_{L,\eta+1} - 2 \frac{\eta-1}{2\eta+1} \delta_{L,\eta-1} \delta_{LL'} \right.$$

$$\left. - 6 \frac{\sqrt{\eta(\eta+1)}}{\ldots} \delta_{L,\eta-1} \delta_{L',\eta\pm1} \right\} V_T(r)$$

$$\equiv \left(V_1(r,\rho^2)\right)^{JST}_{LL'} + \overline{V}^{JST}_{LL'}(r) . \qquad 5.4.34'$$

Explizit findet man auf analoge Weise wie oben

$$\overline{V}(^1S_0)=\overline{V}^{001}_{00}(r)=V^a_0(r), \qquad 5.4.35$$

$$\overline{V}(^1P_1)=\overline{V}^{100}_{11}(r)=V^a_0(r) - 2\ V_{SO2}(r), \qquad 5.4.36$$

$$\overline{V}(^3P_0)=\overline{V}^{011}_{11}(r)=V^a_1(r) - 2\ V_{SO}(r) + 4\ V_{SO2}(r) - 4\ V_T(r), \qquad 5.4.37$$

$$\overline{V}(^3P_1)=\overline{V}^{111}_{11}(r)=V^a_1(r) - V_{SO}(r) - V_{SO2}(r) + 2\ V_T(r), \qquad 5.4.38$$

$$\overline{V}(^3P_2)=\overline{V}^{211}_{11}(r)=V^a_1(r) + V_{SO}(r) + V_{SO2}(r) - (2/5)\ V_T(r), \qquad 5.4.39$$

$$\overline{V}(^1D_2)=\overline{V}^{201}_{22}(r)=V^a_0(r) - 6\ V_{SO2}(r), \qquad 5.4.40$$

$$\overline{V}(^3D_2)=\overline{V}^{210}_{22}(r)=V^a_1(r) - V_{SO}(r) - 5\ V_{SO2}(r) + 2\ V_T(r), \qquad 5.4.41$$

$$\overline{V}(^3D_3)=\overline{V}^{310}_{22}(r)=V^a_1(r) + 2\ V_{SO}(r) + 4\ V_{SO2}(r) - (4/7)\ V_T(r). \qquad 5.4.42$$

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist zur Berechnung der T-Matrixelemente $T^{JST}_{LL'}(p,p':E)$ eine lineare Integralgleichung (bzw. Systeme von gekoppelten linearen Integralgleichungen) vom Fredholmtyp zu lösen.

Die Behandlung der Integralgleichung für die Wellenfunktion $\psi^{JST}_{LL'}$, die bereits in Kapitel 4 diskutiert wurde, ist in diesem Fall gesondert zu betrachten. Dies geschieht in Kapitel 8, wo die numerische Lösungsmethode linearer Integralgleichungen vom Fredholmtyp via Matrixinversion beschrieben wird.

6. Die Integralgleichung $T^{(ij)}=T^{(00)}+2^{-1}T^{(00)}(\Lambda^{(ij)}-\Lambda^{(00)})T^{(ij)}$.

Zur Berechnung der $T^{(11)}$-Matrix könnten wir wieder von der Integralgleichung der Streumatrix $T^{(ij)}$ von Kapitel 2 unter Verwendung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators (3.3.13) ausgehen. Mit der Definition des Wellenoperators $\Omega^{(11)}$ gemäß Gleichung (4.5.1) würde dies wieder, nach Lösen der Fredholmgleichung (4.5.9) für die korrespondierende $\psi^{(11)}$-Funktion, auf die $T^{(11)}$-Matrixelemente führen.

Dieser Weg wurde von verschiedenen Autoren (WW68,WEG69,HK74) unter Verwendung sogenannter separabler Potentiale ($V(r,r')=\lambda\, V(r)V(r')$) (TA64,JO75) beschritten. Diese gestatten aufgrund ihrer Separabilität die Berechnung der Streumatrix durch eine einfache Impulsintegration über das Produkt aus freier Wechselwirkung und Propagator im Impulsraum, die sich in einfachen Fällen analytisch ausführen läßt.

Dagegen erfordert die numerische Behandlung der Integralgleichung (4.5.9) für die ψ-Wellenfuktion (vgl. Kapitel 8), die im Fall nichtseparabler Potentiale zu lösen wäre, eine (rechenzeitaufwendige) Matrixinversion pro $T^{JST}_{LL'}(p,p';E)$-Wert, wobei zusätzlich, im Unterschied zur $\Lambda^{(00)}$-Methode, der Propagator $\Lambda^{(11)}(r,r';E)$ mit entsprechenden numerischen Methoden selbstkonsistent berechnet werden muß. Bei Verwendung realistischer Nuklkeon-Nukleon-Potentiale wie wir sie im letzten Kapitel diskutiert haben und Summation über alle im Fall der Kernmaterie relevanten Partialwellen ($L\leq 2$), steigen dabei die Programmanforderungen über die Maßen. Dies macht einen anderen Weg zur Berechnung der $T^{(11)}$-Elemente notwendig, der nun behandelt werden soll.

Dazu erinnern wir uns an die einfache mathematische Form des $\Lambda^{(00)}$-Propagators aus (3.3.1'), dessen Matrixelemente von (4.2.4) in analytisch geschlossener Form angegeben werden konnten (s. Kapitel 4.2). Wie bereits erwähnt beschreibt dieser die Streuung von zwei Nukleonen mit den freien Einteilchenenergien $\varepsilon^{\circ}_p=(2m)^{-1}p^2$ $(\varepsilon_p=(2m)^{-1}p^2+\Sigma(p)$ mit $\Sigma(p)\equiv 0)$ in den intermediären Zuständen und berücksichtigt das umgebende Medium lediglich über das chemische Potential μ. Damit läßt sich, im Vergleich zur $\Lambda^{(10)}$- und $\Lambda^{(11)}$-Methode, $\Lambda^{(00)}(r,r';E)$ und mithin die Streumatrix $T^{(00)}(p,p';E)$ mit relativ geringem Aufwand angeben, deren Kenntnis, wie wir im folgenden sehen werden, ausreicht, um die $T^{(11)}(p,p';E)$-Streumatrix in "Bornscher Näherung" zu berechnen.

Um die Näherungsgleichung zu finden, betrachten wir die bekannte Operatorengleichung (2.3.3) in der Form

$$T^{(ij)} = 2V^{(a)} + V^{(a)} \Lambda^{(ij)} T^{(ij)}. \qquad 6.1$$

Nach Gleichung (2.3.3) gilt aber auch

$$T^{(00)} = (2 + T^{(00)} \Lambda^{(00)}) V^{(a)}, \qquad 6.2$$

so daß durch Anwendung des Operators $(2+T^{(00)}\Lambda^{(00)})$ von links auf die Relation (6.1), Substitution von $2+T^{(00)}\Lambda^{(00)}$ und algebraischer Umformung Gleichung (6.1) übergeht in

$$T^{(ij)} = T^{(00)} + 2^{-1} T^{(00)} (\Lambda^{(ij)} - \Lambda^{(00)}) T^{(ij)}, \qquad 6.3$$

$(ij=10,11)$.

Für die Differenz der Propagatoren definieren wir

$$\Delta^{(ij)}_{\vec{P}}(\vec{q};E) := \Lambda^{(ij)}_{\vec{P}}(\vec{q},E) - \Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q};E)\,, \qquad 6.4$$

worin die Abhängigkeit von Relativ- und Schwerpunktsimpuls zum Ausdruck kommt.

6.1 Multipolentwicklung der Integralgleichung.

Hierzu gehen wir ähnlich vor wie in Kapitel 4. Unter Berücksichtigung der Galileiinvarianz der T-Matrixelemente finden wir in der üblichen Notation (vgl. Anhang A.9.2)(*)

$$\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 | T^{(ij)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle = \langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 | T^{(00)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle \qquad 6.1.1$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\tilde{\eta}_1}\sum_{\tilde{\eta}_2}\int d^3\vec{q}\,\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 | T^{(00)}_{\vec{P}}(E) | \vec{q}\,\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 \rangle$$

$$\left(\Lambda^{(ij)}_{\vec{P}}(\vec{q},E) - \Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q};E)\right)_{\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2} \langle \vec{q}\,\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 | T^{(ij)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}\,'\eta_1'$$

mit $\Lambda^{(ij)}_{\vec{P}}(\vec{q},E)$ von (3.2.4) und $\Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q},E)$ von (3.3.1'), wobei wieder $\vec{p}_{\substack{1\\2}} = \vec{p}_{\pm} = 2^{-1}\vec{P} \pm \vec{q}$ zu setzen ist.

Im folgenden beschränken wir uns auf (ij)=(11), so daß der Propagatorterm in (6.1.1) bzw $\Delta^{(11)}$ von (6.4) übergeht in

$$\Delta^{(11)}_{\vec{P}}(\vec{q},E) = N(\vec{q}\,\vec{P})\left(E - \sum_{j=t}\hat{\varepsilon}(p_j) - \frac{i}{2}\gamma(p_j)\right)^{-1} \qquad 6.1.2$$

$$- \left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu - \frac{\vec{q}^{\,2}}{m} + i0\right)^{-1}.$$

(*) Die Translationsinvarianz der T-Matrixelemente in Kernmaterie impliziert (Determinante der Jakobimatrix=1):

$$\langle \vec{p}_1\vec{p}_2 | T | \vec{p}_1'\vec{p}_2' \rangle = \langle \vec{q}\,\vec{P} | T | \vec{q}\,'\vec{P}' \rangle = \delta(\vec{P}-\vec{P}')\,\langle \vec{q} | T_{\vec{P}} | \vec{q}\,' \rangle\,.$$

Zur Multipolentwicklung von (6.1.1) benutzen wir die Vollständigkeitsrelation $\mathbb{1} = \sum_{JM} \sum_{LS} \sum_{TT_3} |{}^{J}_{M}{}^{L}_{S}{}^{T}_{T_3}\rangle\langle{}^{T}_{T_3}{}^{J}_{M}{}^{L}_{S}|$, womit sich die Matrixelemente eines Operators $\hat{O}$, $\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2|\hat{O}|\vec{p}\,'\eta_1'\eta_2'\rangle$ (η_i=Spin-, Isospinquantenzahlen) entwickeln lassen als

6.1.3

$$\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2|\hat{O}|\vec{p}\,'\eta_1'\eta_2'\rangle = \sum_{JM}\sum_{LL'}\sum_{ST}\sum_{T_3} \left(\begin{matrix} t_1 & t_2 \\ t_{3_1} & t_{3_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} T \\ T_3\end{matrix}\right) O^{JST}_{LL'}(p,p') \left(\begin{matrix} T \\ T_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix} t_1' & t_2' \\ t_{3_1}' & t_{3_2}'\end{matrix}\right)$$

$$\sum_{M_L M_S}\sum_{M_L' M_S'} \left(\begin{matrix} s_1 & s_2 \\ m_{s_1} & m_{s_2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix} S \\ M_S\end{matrix}\right) Y_{LM_L}(\Omega_{\vec{p}}) \left(\begin{matrix} L & S \\ M_L & M_S\end{matrix}\middle|\begin{matrix} J \\ M\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} J \\ M\end{matrix}\middle|\begin{matrix} L' & S \\ M_L' & M_S'\end{matrix}\right) Y^{*}_{L'M_L'}(\Omega_{\vec{p}'}) \left(\begin{matrix} S \\ M_S'\end{matrix}\middle|\begin{matrix} s_1' & s_2' \\ m_{s_1}' & m_{s_2}'\end{matrix}\right).$$

Die individuellen Spin-, Isospinquantenzahlen s_i bzw. t_i haben darin je den Wert 1/2. Einsetzen dieser Entwicklung für $\hat{O} \in \{T^{(00)}, T^{(11)}\}$ liefert uns wieder das aus Kapitel 4 bekannte Raumwinkelintegral:

$$A_{\Omega} = \int_{(\vec{p})} d\Omega_{\vec{p}} \left(\Lambda^{(11)}_{\vec{E}}(\vec{p},\vec{\varepsilon}) - \Lambda^{(00)}_{\vec{E}}(\vec{p},\vec{\varepsilon})\right) Y^{*}_{L''M_L''}(\Omega_{\vec{p}})\, Y_{L'''M_L'''}(\Omega_{\vec{p}}). \qquad 6.1.4$$

Zur Berechnung des Integrals in (6.1.4) machen wir von der Legendreentwicklung des Pauliprojektors von (4.4.4-8) Gebrauch und koppeln das Produkt $Y^{*}Y$ der beiden Kugelflächenfunktionen in (6.1.4) gemäß (4.4.9) zu einer Summe über eine Kugelflächenfunktion.
Dies führt in Analogie zu (4.4.11) auf den Ausdruck

$$A_{\Omega}^{(11)} := \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} \quad N_{\lambda}(\vec{q};\vec{P}) \quad \left(E - \sum_{j=\pm} \left(\hat{\varepsilon}(\langle\rho_j\rangle_{\lambda}) - \frac{i}{2}\gamma(\langle\rho_j\rangle_{\lambda})\right)\right)^{-1}$$

6.1.5

$$\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}} \; Y_{\lambda,0}(\Omega_{\vec{q}}) \; (-)^{M_{L''}} \sum_{\tilde{\lambda}\,\tilde{M}_{\lambda}} \frac{\sqrt{(2L''+1)(2L'''+1)(2\tilde{\lambda}+1)}}{4\pi}$$

$$\begin{pmatrix} L'' & L''' & \tilde{\lambda} \\ -M_{L''} & M_{L''} & \tilde{M}_{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L''' & \tilde{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{*}_{\tilde{\lambda}\tilde{M}_{\lambda}}(\Omega_{\vec{q}}) \, .$$

worin $\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}}$ unmittelbar den Beitrag $\delta_{\lambda\tilde{\lambda}}\,\delta_{M_{\lambda}\tilde{M}_{\lambda}}$ ergibt.
Die Raumwinkelintegration von

6.1.6

$$A_{\Omega}^{(00)} := \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{q}} \; \Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q}\,E) \; Y^{*}_{L'M_{L'}}(\Omega_{\vec{q}}) \; Y_{L''M_{L''}}(\Omega_{\vec{q}}) = \Lambda^{(00)}_{-\vec{P}}(\vec{q}\,E)\,\delta_{L'L''}\,\delta_{M_{L'}M_{L''}}$$

bereitet keine Schwierigkeiten, so daß in Anbetracht der Gleichungen (6.1.3-6) die Integralgleichung (6.1.1) übergeht in

$$\left(\langle {}^{S}_{M_S} | {}^{S'}_{M_S'} \rangle = \delta_{\ldots} \, \delta_{M_S M_S'} - m_{\lambda} \, \omega_{\ldots} \sum_{M_S} \langle {}^{S}_{M_S} \, {}^{L}_{M_L} \, {}^{\ldots}_{\ldots} \, \omega_{\ldots} \, \omega_{\ldots} \rangle \, \omega_{\ldots} \, \omega_{\ldots} \, \langle {}^{S}_{M_S} \, {}^{L}_{M_L} \, {}^{\ldots}_{\ldots} \rangle \, \Delta \right)$$

$$\Delta = \sum_{M_L M_S} \langle {}^{M}_{M} \, {}^{L}_{M_L} \, {}^{S}_{M_S} \rangle \langle {}^{M}_{M} \, {}^{L}_{M_L} \, {}^{S}_{M_S} \rangle$$

6.1.7

$$\left({}^{(a)}T^{(11)}_{|\vec{P}|}(p,p';E)\right)^{MST}_{LL'} = \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{P}|}(p,p';\tilde{E})\right)^{MST}_{LL'}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{i}{L''} \delta_{L'S'T} \int_0^{\infty} dq\, q^2 \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{P}|}(p,q;\tilde{E})\right)^{MST}_{LL''}$$

$$\Bigg\{ \sum_{M_{L''}} \sum_{M_S} (-)^{M_{L''}} \begin{pmatrix} L'' & S \\ M_{L''} & M_S \end{pmatrix}\Bigg| \begin{matrix} M \\ M \end{matrix} \Bigg) \sum_{L'''} \begin{pmatrix} L''' & S \\ M_{L''} & M_S \end{pmatrix}\Bigg| \begin{matrix} M \\ M \end{matrix} \Bigg) \sqrt{(2L''+1)(2L'''+1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \langle N_{\lambda}(\vec{q};\vec{P})\rangle_{\lambda} \left(E - \sum_{j=\pm} \left(\hat{\varepsilon}(\langle\rho_j\rangle) - \frac{i}{2}\gamma(\langle\rho_j\rangle)\right)\right)^{-1} \begin{pmatrix} L'' & L''' & \lambda \\ -M_{L''} & M_{L''} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & L''' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu - \frac{\vec{q}^2}{m} + i0\right)^{-1} \Bigg\} \left(T^{(11)}_{|\vec{P}|}(q,p';E)\right)^{MST}_{L''L'} \delta_{L'S'T}$$

wobei

$$\langle \vec{p}^{\,2}_{\pm} \rangle = (4^{-1}P^2 + q^2 \pm 3^{-1/2} \langle N_{\lambda=0}(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \, q \, P) \qquad 6.1.8$$

ist. Für den Spezialfall $\lambda=0$ reduziert sich (6.1.7) unter Ausnutzung der Eigenschaften der Wignersymbole und Clebsch-Gordan Koeffizienten auf

6.1.9

$$\left({}^{(a)}T^{(11)}_{|\vec{E}|}(p,p';\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL'} = \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{E}|}(p,p';\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL'}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{L''} \xi_{L''ST} \int_0^\infty dq\, q^2 \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{E}|}(p,q;\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL''}$$

$$\langle (t)_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \left(E - \sum_{j=2} \left(\hat{\varepsilon}(\langle p_j\rangle) - \frac{i}{2}\gamma(\langle p_j\rangle)\right)\right)^{-1} - \left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu - \frac{\vec{q}^2}{m} + i0\right)^{-1}$$

$$\xi'_{L''ST}\, {}^{(a)}T^{(11)}_{|\vec{E}|}(q,p';E)\Big)^{\eta S T}_{L''L'}$$

mit

$$\tilde{E} := E - P^2/(4m) + 2\mu . \qquad 6.1.9'$$

Bevor wir im folgenden Abschnitt auf die Approximation der Integralgleichung (6.1.9) näher eingehen, sei darauf hingewiesen, daß ${}^{(a)}T^{(11)}$ in (6.1.9) in ihrer antisymmetrischen Form angegeben wurde. Eine kurze Diskussion der Antisymmetrie der Streumatrix T findet sich in Abschnitt 2 von Kapitel 8.

6.2 Iteration der $T^{(11)}$-Matrix (Korrektur zum Born-Term der $T^{(11)}$-Matrix.

Das selbstkonsistent zu lösende Schema der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen macht die Beschränkung auf die Korrektur zum Born-Term der $T^{(11)}$-Matrix notwendig. Gleichung (6.3) lautet damit

$$T^{(11)} = T^{(00)} + 2^{-1}\, T^{(00)} \quad \Delta^{(11)} \quad T^{(00)}, \qquad 6.2.1$$

die von H. Gall und M.K. Weigel (GW76) für ein einfaches (lokales) S-Wellen Potential mit Hard-Core (Eckart-Hulten-Potential) untersucht wurde. Dabei hat sich gezeigt, daß (6.2.1), bis auf den Polbereich des Deuterons in der $T^{110}_{LL'}$-Matrix, befriedigende Resultate ergibt(*).

In (GW76) wurden dabei die Breiten $\gamma(\langle\rho_j\rangle_x)$ durch den mit Omikron o multiplizierten Wert des Pauliprojektors $\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x$ im $\Lambda^{(11)}$-Propagator von (3.3.13) ersetzt:

$$\gamma(\langle\rho_j\rangle_x) \longrightarrow o\,\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x\,, \qquad 6.2.2$$

$$\Lambda^{(11)}(\rho_+,\rho_-;E) = \frac{\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x}{E + 2\mu - \sum_{j=\pm} \varepsilon(\langle\rho_j\rangle_x) + i\,o\,\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x}. \qquad 6.2.2'$$

Dies gründet auf dem Theorem von Luttinger, wonach, zumindestens in der Näher der Fermikante, $\gamma(p)\longrightarrow 0$ für $p\longrightarrow p_F$ gilt (s. Kapitel 7). Damit haben wir eine zusätzliche Approximation des $\Lambda^{(11)}$-Propagators und mithin der $T^{(11)}$-Gleichung von (6.1.9) vorgenommen. Ohne die Ersetzung (6.2.2) steht im Nenner des $\Lambda^{(11)}$-Propagators von Gleichung (6.1.9) ein endlicher Imaginärteil γ vo

(*) In unserer Untersuchung wird der Polbereich nicht erreicht, da nur die Größen der Kernmaterie im Grundzustand betrachtet werden.

der nur für Impulse $p \longrightarrow p_F$ verschwindet. Für $\Lambda_{\vec{p}}^{(11)}(\vec{q};E)$ aus (3.3.13)(*)

$$\Lambda_{\vec{p}}^{(11)}(\vec{q};E) = \left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle_x)\right) \langle N_0(\vec{q},\vec{p}) \rangle_x \left(\left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle)\right)^2 + \left(\sum_{j=\pm} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle)\right)^2\right)^{-1} \tag{6.2.3}$$

$$- i \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=\pm} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle)\right)$$

$$\left(\sum_{j=\pm} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle)\right) \langle N_0(\vec{q},\vec{p}) \rangle_x \left(\left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle)\right)^2 + \left(\sum_{j=\pm} \tfrac{1}{2}\gamma(p_j)\right)^2\right)^{-1}$$

finden wir für infinitesimale Werte von $\sum_{j=\pm} \gamma(\langle p_j \rangle)$ (vgl. (6.2.2')), mit Hauptwert und δ-Funktion gemäß

$$P\frac{1}{x} = \lim_{\nu \to 0} x\,(x^2+\nu^2)^{-1}, \tag{6.2.4}$$

$$\delta(x) = \pi^{-1} \lim_{\nu \to 0} \nu\,(x^2+\nu^2)^{-1}, \tag{6.2.5}$$

die folgende Näherung für den Propagator:

$$\Lambda_{\vec{p}}^{(11)}(\vec{q};E) = \langle N_0(\vec{q},\vec{p}) \rangle_x \left(\left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle)\right) + i \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=\pm} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle)\right) \cdot 0\right)^{-1} \tag{6.2.6}$$

$$= P\left(\langle N_0(\vec{q},\vec{p}) \rangle_x \left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle)\right)^{-1}\right) \tag{6.2.7}$$

$$- i\pi \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=\pm} \tfrac{\gamma}{2}(\langle p_j \rangle)\right) \delta\left(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle)\right).$$

(*) Die Definition von $\gamma(p)$, $\varepsilon(p)$, $\hat{\varepsilon}(p)$ etc. erfolgt in Kapitel 7.

Durch Einsetzen in Gleichung (6.1.9) verifizieren wir die folgende Gleichung zur Berechnung der $T^{(11)}$-Matrix. An (6.1.9) schließt sich

$$\left({}^{(a)}T^{(11)}_{|\vec{E}|}(p,p';E)\right)^{\eta S T}_{LL'} = \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{E}|}(p,p';\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL'} \qquad 6.2.8$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{L''} \xi_{L''ST} \Bigg\{ \int_0^\infty dq\, q^2 \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{E}|}(p,q;\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL''} \Big[\Big(E - \sum_{j=1} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle) \Big)^2 + \Big(\sum_{j=2} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle) \Big)^2 - i\,\mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle) \Big)$$

$$\Big(\Big(E - \sum_{j=1} \hat{\varepsilon}(\langle p_j \rangle) \Big)^2 + \Big(\sum_{j=2} \tfrac{1}{2}\gamma(\langle p_j \rangle) \Big)^2 \Big)^{-1} \Big] \Big(T^{(00)}_{|\vec{E}|}(q,p';\tilde{E}) \Big)^{\eta S T}_{L'L''}$$

$$- \int_0^\infty dq\, q^2 \left({}^{(0)}T^{(00)}_{|\vec{E}|}(p,q;\tilde{E})\right)^{\eta S T}_{LL''} \Big[\Theta\big(-(\varepsilon(p_1)+\bar{\varepsilon})\big) \Big(E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu -$$

$$+ \Theta\big(\varepsilon(p_1)+\bar{\varepsilon}\big) \Big[P\Big(E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - q^2 \Big)^{-1}$$

$$- i\pi\, \delta\Big(E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - q^2 \Big) \Big] \Big]$$

$$\xi_{L'ST} \left(T^{(00)}_{|\vec{E}|}(q,p';\tilde{E}) \right)^{\eta S T}_{L''L'} \Bigg\}$$

mit $\bar{\varepsilon} := \varepsilon(p_2) - \frac{p^2}{4m} - q^2$, $\tilde{E} := E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu$ 6.2.9

an. In den Θ-Funktionen von (6.2.8) treten dabei die Einteilchenenergien $\varepsilon(p_1)$ und $\varepsilon(p_2)$ auf, die über das Energieargument

$E = \varepsilon(P_1) + \varepsilon(P_2) - 2\mu$ der $T^{(11)}$-Matrix gegeben sind. Je nachdem ob $\bar{\varepsilon} + \varepsilon(P_1) \gtrless 0$ ist, liefert damit der $\Lambda^{(00)}$-Propagator rein reelle oder komplexe Beiträge, die wir durch die beiden Sprungfunktionen in (6.2.9) explizit aufgeführt haben(*).

Bei der zusätzlichen Näherung (s. (6.2.6)), wenn die Einteilchenbreite γ durch die infinitesimale Größe $o\langle N_o(q,P)\rangle_x$ ersetzt wird (vgl. (6.2.6) und (6.2.2')), ergibt sich für Gleichung (6.2.1)

$$
\begin{aligned}
\left({}^{(a)}T^{(11)}_{|\vec{P}|}(P, P'; E)\right)^{JST}_{LL'} = {} & \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{P}|}(P, P'; \tilde{E})\right)^{JST}_{LL'} \qquad 6.2.10 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{L''} \xi_{L''ST} \Big\{ \int_0^\infty dq\, q^2 \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{P}|}(P, q; \tilde{E})\right)^{JST}_{LL''} \Big[P\Big(\langle N_0(\vec{q}, \vec{P})\rangle_x \\
& \Big(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle P_j\rangle)\Big)^{-1}\Big) - i\pi \langle N_0(\vec{q}, \vec{P})\rangle_x \quad \mathrm{sgn}(\langle N_0(\vec{q}, \vec{P})\rangle_x) \\
& \delta\Big(E - \sum_{j=\pm} \hat{\varepsilon}(\langle P_j\rangle)\Big) \Big] \quad \left(T^{(00)}_{|\vec{P}|}(q, P'; \tilde{E})\right)^{JST}_{L''L'} \\
& - \int_0^\infty dq\, q^2 \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{P}|}(P, q; \tilde{E})\right)^{JST}_{LL''} \Big[\theta(-(\varepsilon(P_1) + \bar{\varepsilon}))\Big(E - \frac{P^2}{4} + 2\mu - q^2\Big)^{-1} \\
& + \theta(\varepsilon(P_1) + \bar{\varepsilon}) \Big[P\Big(E - \frac{P^2}{4} + 2\mu - q^2\Big)^{-1} \\
& - i\pi\, \delta\Big(E - \frac{P^2}{4} + 2\mu - q^2\Big) \Big] \Big] \\
& \xi_{L'ST} \left(T^{(00)}_{|\vec{P}|}(q, P'; \tilde{E})\right)^{JST}_{L''L'} \Big\} .
\end{aligned}
$$

(*) Die Gleichungen der $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen werden in Kapitel 7 diskutiert.

Für rein reelle Matrixelemente $(T^{(00)}(p,p';E))^{JST}_{LL'} \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Adjunktionsbeziehung $T=T^{+}$ die Gleichung

$$(T^{(00)}(p,p';\beta))^{JST}_{LL'} = (T^{(00)}(p',p;\beta))^{JST}_{L'L} \quad , \quad \beta<0. \qquad 6.2.11$$

Diese Relation ist gültig, solange $\Lambda^{(00)}=\Lambda^{(00)^{+}}$ ist.
Der Zusammenhang zwischen den Energieargumenten β und E ist aus (4.6.5') zu entnehmen. Danach ist für $\beta=E-(4m)^{-1}P^{2}+2\mu=-w^{2}<0$ der infinitesimale Summand im Nenner des $\Lambda^{(00)}$-Propagators redundant.

Zusammenfassend haben wir in den vorausgehenden Kapiteln die Struktur der $\Lambda^{(ij)}$-Theorien diskutiert und die Umformungen und Näherungen eingeführt, die die numerische Behandlung ermöglichen.

7. Die Gleichungen der $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen.

In diesem Kapitel wollen wir die Lösungsmethoden der $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen im einzelnen betrachten. Die Quantenzahlen der Einteilchenzustände in Kernmaterie sind, wie bereits bekannt, der Impuls $\vec{p}$ und die z-Komponenten von Spin σ und Isospin τ, die wir zu dem Tripel $(\vec{p};\sigma,\tau)=(\vec{p};\eta)$ zusammenfassen. Wegen der räumlichen Translationsinvarianz ist der Gesamtimpuls des Zweinukleonensystems eine Erhaltungsgröße. Ferner beschränken wir uns auf den einfachsten Fall von Kernmaterie mit gleicher Zahl von Neutronen und Protonen (N=Z) - d.h. der Gesamtisospin ist null - und nehmen an, daß der Grundzustand den Gesamtspin S=0 besitzt. Hieraus folgt, wovon bereits öfter Gebrauch gemacht wurde: Die Einteilchen-Greenfunktion und die Spektralfunktion sind diagonal in den Spin-, Isospinindizes ($A_{\eta\eta'}(\vec{p};\varepsilon)=\delta_{\eta\eta'}A_{\eta}(\vec{p};\varepsilon)$), und die Diagonalelemente sind unabhängig von η ($A_{\eta\eta'}(\vec{p};\varepsilon)=\delta_{\eta\eta'}A(\vec{p};\varepsilon)$).
Wir beginnen mit den Gleichungen der beiden einfacheren $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen (vgl. (WW71)).

7.1 Die $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Approximation.

Die $\Lambda^{(00)}$-Näherung wurde für Kernmaterie von Puff (PU61), Reynolds und Puff (RP63,RP63+), Falk und Wilets (FW61), Gall, Weigel und Wegmann (GWW75), Gall und Weigel (GW76), Fiset und Foster (FF71,FF72), Marville (MA76), Haensel und Marville (HM77) und anderen Autoren untersucht(*).

(*) Für weiterreichende Referenzen sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

Der Propagator der $\Lambda^{(00)}$-Methode ist aus Kapitel 4, Gleichungen (4.2.5-17) bekannt. Wie wir aus (4.2.6) erkennen, bleibt das Pauliprinzip bei Streuung der Nukleonen in virtuelle Zwischenzustände unberücksichtigt.

Die T-Matrix besitzt in dieser Näherung im für uns relevanten Energiebereich (s. unten) keinen Schnitt, so daß die Spektralfunktion τ aus Gleichung (3.2.12) keinen Beitrag liefert und mithin der Imaginärteil des Massenoperators $\pi^{(\tau)}$ verschwindet. Wegen $\pi^{(\tau)}(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\Gamma(\varepsilon) \to 0$ lesen wir damit für die Spektralfunktion von (3.1.22) den Ausdruck

$$A(\vec{p},\varepsilon) = \delta\left(\varepsilon - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mu - \Sigma^{(\tau)}(\vec{p},\varepsilon)\right) \quad , \quad \varepsilon < 0 \qquad 7.1.1$$

ab.

Hieraus folgt für die Einteilchenenergien in dieser Näherung

$$\varepsilon(p) \equiv \varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} + \Sigma^{(\tau)}(p, \varepsilon_p - \mu), \quad (\hat{\varepsilon}_p \equiv \varepsilon(p) - \mu). \qquad 7.1.2$$

Durch Taylorentwicklung des Massenoperators $\Sigma^{(\tau)}(\vec{p},\varepsilon)$ um eine Nullstelle von $\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu - \Sigma^{(\tau)}(\vec{p},\varepsilon)$ aus (7.1.1) schließt sich für die Relation (7.1.1)

$$A(\vec{p};\varepsilon) = n(p)\,\delta(\varepsilon - \varepsilon(p) + \mu) \qquad 7.1.3$$

mit

$$n(p) = \left(1 - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Sigma^{(\tau)}(p,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_p-\mu}\right)^{-1} \qquad 7.1.4$$

an. Wie Puff gezeigt hat (PU61), ist im betrachteten Energiebereich (der Kernmaterie im Grundzustand) $\frac{\partial\Sigma^{\tau}}{\partial\varepsilon} < 0$ und mithin $n(p) < 1$. Für die Energie pro Nukleon $\langle\phi_0|H|\phi_0\rangle/N =: E_0(N)/N$ finden wir durch Einsetzen von (7.1.3) in die Gleichungen (3.1.13) und (3.1.14)

$$E_0(N)/N = \rho^{-1} \sum_{\tau} \int^{p_F} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, n(p) \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V(p) \right) \qquad 7.1.5$$

mit

$$V(p) := \Sigma^{(\Sigma')}(p;\ \varepsilon(p) - \mu) \qquad 7.1.6$$

und der Dichte

$$\rho := \sum_{\tau} \int^{p_F} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, n(p)\,. \qquad 7.1.7$$

Dabei ist der Fermiimpuls p_F implizit definiert durch (s. Fußnote auf S. 13)

$$\varepsilon(p_F) = \mu\,. \qquad 7.1.8$$

Die Gleichungen für die Energie pro Nukleon und Dichte formen wir um in

$$E_0(N)/N = 2(\rho\pi^2)^{-1} \int_0^{p_F} dp\, p^2\, n(p) \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V(p) \right) \qquad 7.1.9$$

und

$$\rho = 2\pi^{-2} \int_0^{p_F} dp\, p^2\, n(p)\,. \qquad 7.1.10$$

Für die Dichteverteilung der Einteilchenzustände des freien Fermigases ($n(p) \equiv 1$, $p < p_F$) ergibt sich

$$\rho = 2(3\pi^2)^{-1}\, p_F^{(0)\,3}\,. \qquad 7.1.11$$

Die effektive Masse m^* ist durch

$$\frac{\tilde{m}}{m} := \left(1 + \frac{m}{p} \frac{\partial}{\partial p} \Sigma^{(\Sigma')}(p;\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=\hat{\varepsilon}_p} \right)^{-1} \quad \text{(K-Masse)}, \qquad 7.1.12$$

$$\frac{\bar{m}}{m} := 1 - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Sigma^{(\Sigma')}(p;\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=\hat{\varepsilon}_p} \quad \text{(E-Masse)}, \qquad 7.1.12'$$

$$\frac{m^*}{m} := \frac{\bar{m}}{m}\,\frac{\tilde{m}}{m} = \frac{p}{m} \left(\frac{d\varepsilon(p)}{dp} \right)^{-1} \qquad 7.1.12''$$

definiert (FW71,FR81,MA81)(*).

Die Gleichung für den Realteil des Massenoperators findet man

---

(*) Die K-Masse $\tilde{m}/m$ charakterisiert die Nichtlokalität des Massenoperators. Die E-Masse $\bar{m}/m$ ist ein Maß für die Energieabhängigkeit des Massenoperators. Sie gründet auf dynamischen Effekten (z.B. Polarisierungen und Korrelationen (s. Abschnitt 7.3)).

via (3.1.31). Dazu setzen wir die Spektralfunktion von (7.1.3) mit der Einteilchendichte n(p) aus (7.1.4) ein und berechnen die Drehimpulszerlegung der $T^{(ij)}$-Matrizen der $\Lambda^{(ij)}$-Näherungen (ij=00, 10). Der Ausdruck für die Selbstenergie lautet damit

$$\Sigma^{(\Sigma)}(\vec{p}_1;\varepsilon) = \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; n_{\eta_2}(p_2) \langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | T^{(ij)}(\varepsilon + \hat{\varepsilon}_{p_2}) | \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 \rangle \qquad 7.1.13$$

$$= \sum_{m_2 t_3} \sum_{\substack{M_L M_S \\ M_L' M_S'}} \sum_{\mathcal{M}} \sum_{LL'} \sum_{ST T_3} \int_0^{p_F} dp_2 \, p_2^2 \, n(p_2) \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}_2} \qquad 7.1.13'$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} S \\ M_S \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} S \\ M_S' \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix}\right) Y_{LM_L}\left(\Omega_{\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}}\right)$$

$$Y^*_{L'M_L'}\left(\Omega_{\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}}\right) \left(\begin{matrix} L & S \\ M_L & M_S \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} L' & S \\ M_L' & M_S' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J \\ M \end{matrix}\right) \left({}^{(a)}T^{(ij)}_{|\vec{p}_1+\vec{p}_2|} \left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}; \varepsilon + \hat{\varepsilon}_{p_2} \right)_{LL'} \right)^{\mathcal{M}ST} \qquad 7.1.13''$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\mathcal{M}STLL'} (2J+1)(2T+1) \xi_{LST} \xi_{L'ST} \int_0^{p_F} dp_2 \, p_2^2 \, n(p_2) \int_{-1}^{+1} dx \left({}^{(a)}T^{(ij)}_{|\vec{p}_1+\vec{p}_2|} \left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}; \varepsilon + \hat{\varepsilon}_{p_2} \right) \right)^{\mathcal{M}}_{LL'}$$

mit $x := (\vec{p}_1\vec{p}_2)/(p_1 p_2)$, ij=00,10(*).

Die gekoppelten Gleichungen (7.1.13) und (7.1.4) wurden bei vorgegebenem Fermiimpuls p_F mit den in Kapitel 5 aufgeführten Nukleon-Nukleon-Potentialen numerisch gelöst. Die berechneten Werte für n(p), $\varepsilon(p)$ und $\Sigma(p;\varepsilon)$ dienten als Startwerte zur selbstkonsistenten Lösung der $\Lambda^{(10)}$- und $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen. Die Ergebnisse der $\Lambda^{(10)}$-Rechnungen (mit den Potentialen HJ und RSC) wurden als Eingabewerte für die $\Lambda^{(11)}$-Rechnungen verwendet. Eine ausführliche Diskussion der numerischen Auswertung schließt sich an dieses Kapitel an. Nach Berechnung der Selbstenergie (7.1.13'') und der Besetzungszahlwahrscheinlichkeit n(p) von (7.1.4) erhält man auf einfache Weise die Energie pro Nukleon E_0/N, die Dichte ρ, das chemische Potential μ, den mittleren Nukleonenabstand r_0 und die Kompressibilität $\varkappa$ in Abhängigkeit des Fermiimpulses über die angegebenen Gleichungen.

(*) Der Massenoperator ist antisymmetrisiert via ${}^{(a)}T = T - T^{ex}$ (T^{ex}= Austauschterm der T-Matrix).

Die noch nicht eingeführten Größen r_0 und $\varkappa$ sind definiert durch

$$r_0 := \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho}} \qquad 7.1.14$$

und

$$\varkappa := r_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} \frac{E_0(N)}{N}\Big|_{r_0^{(s)}} = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \frac{E_0(N)}{N}\Big|_{\rho^{(s)}}^{(*)} . \qquad 7.1.15$$

Der Gleichgewichtszustand von Kernmaterie kann durch die drei Forderungen

$$\frac{E_0(N)}{N}\Big|_{p_F} = \text{Min}, \qquad 7.1.16$$

$$\frac{E_0(N)}{N}\Big|_{p_F} = \mu(p_F) = \varepsilon(p_F) \qquad 7.1.17$$

oder

$$P(p_F) = 0 \qquad 7.1.18$$

definiert werden, wobei P den Druck bezeichnet. Die Beziehung (7.1.17) ist als Hugenholtz-van-Hove-Theorem bekannt (HV58), wonach in einer normalen Fermiflüssigkeit die Energie pro Nukleon mit der Einteilchenenergie an der Fermikante übereinstimmen muß.
Die Gleichungen der $\Lambda^{(10)}$-Näherung führen wir ebenfalls in diesem Abschnitt auf, da diese Approximation ebenso wie $\Lambda^{(00)}$ für negative Frequenzen keinen Schnitt hat ($\Sigma(p,\varepsilon)$ rein reell, $\Gamma \to 0$).
Die Spektralfunktion (3.1.22) hat daher wieder die Form der δ-Funktion von (7.1.3). Die Besetzungszahlverteilung der Einteilchenzustände n(p), die Energie pro Nukleon $E_0(N)/N$, die Dichte und das chemische Potential μ berechnen sich wie oben.
Für den $\Lambda^{(10)}$-Propagator verwenden wir die Ausdrücke (4.3.22-23) oder die Näherung (4.3.27), in der wir dem Pauliprinzip in Strenge

---

(*) Die Ableitungen sind an den Sättigungswerten zu berechnen.

Rechnung getragen haben.
Im Umterschied zur $\Lambda^{(00)}$-Theorie muß hier jedoch der off-shell Massenoperator $\Sigma^{(\sigma)}(p_i; \varepsilon - \frac{p_3^2}{2m} + \mu)$ (i,j)=(1,2), die Dichteverteilung n(p) und die Einteilchenenergie $\varepsilon(p_i)$ zur Berechnung des $\Lambda^{(10)}$-Propagators selbstkonsistent berechnet werden. Als Startwerte der Selbstkonsistenzrechnung können dabei die Resultate der $\Lambda^{(00)}$-Rechnungen dienen.
Untersucht wurde diese Näherung von Puff, Reiner und Wilets (PRW66), Foster (FOS66), Fiset und Foster (FF71,FF72), Marville und Haensel (HM77,HM78,MH78).

7.2 Die $\Lambda^{(11)}$-Approximation.

Diese Näherung hat gegenüber den beiden zuletzt behandelten Methoden im Prinzip zwei wesentliche Vorzüge. Erstens gehört, wie von Baym (BA62) gezeigt, die $\Lambda^{(11)}$-Näherung zu der Klasse der sogenannten "thermodynamisch konsistenten" Approximationen. Dies bedeutet, daß die drei in den Gleichungen (7.1.16-18) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen identische Werte für p_F ergeben. Zweitens kann in dieser Näherung die Lebensdauer τ der Einteilchenzustände abgeschätzt werden, woraus man Information über die Aufweichung der Fermikante durch die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung erhält.
Diese Näherung wurde von Ho-Kim und Khanna (HK74) und von Wegmann in (WEG68) numerisch gelöst. In beiden Arbeiten wurden dabei separable Nukleon-Nukleon-Potentiale verwendet.
Wir berechnen die $T^{(11)}$-Streumatrix über die Integralgleichung (6.3), die, gemäß Relation (6.2.1), einmal iteriert wird (Korrektur zum Born-Term der $T^{(11)}$-Matrix).

Testrechnungen von Gall und Weigel 1976 (GW76+) bestätigen diese Iteration der $T^{(11)}$-Integralgleichung zur Berechnung der Grundzustandsgrößen der Kernmaterie. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Verwendung phänomenologischer- (HJ,RSC) bzw. realistischer Potentiale (PAR) diese Iteration nahelegt , da andernfalls (bei Lösung der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen über die exakte $T^{(11)}$-Integralgleichung (6.1)) die Programmanforderungen zu groß würden.

Wie wir gesehen haben führt der Propagator von (3.3.13), mit den in Abschnitt 6.2 eingeführten Näherungen, auf die Iterationsgleichungen (6.2.8) bzw. (6.2.10) der $T^{(11)}$-Streumatrix, so daß gleich zum effektiven Einteilchenpotential $\Sigma(p;z)$ aus Gleichung (3.1.32) übergegangen werden kann. Wir schreiben den Massenoperator in expliziter Form an, so daß sich an (3.1.32) der Ausdruck

7.2.1

$$\tilde{\Sigma}(p_1,z) = \sum_{\eta'} \int d^3\vec{p}_2 \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \Big\{ \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' | \tilde{T}_{\vec{P}}(z+\varepsilon') | \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \rangle A(p_2,\varepsilon')$$

$$+ \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' | \tau_{\vec{P}}(z) | \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \rangle \tilde{G}^{(1)}(p_2;\varepsilon'-z) \Big\}$$

anschließt.

Für die weitere Diskussion ist es zweckmäßig, den Massenoperator $\tilde{\Sigma}(p_1;\varepsilon+i0)$ in Real- und Imaginärteil aufzuspalten. Nach einiger Rechnung findet man für den Realteil

7.2.2

$$\Sigma^{(\tilde{\Sigma}')}(p_1,\varepsilon+i0) = \sum_{\eta'} \int d^3\vec{p}_2 \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \Big\{ \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' | \Sigma_{\vec{P}}^{(\tilde{T})}(\varepsilon+\varepsilon'+i0) | \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \rangle A(p_2,\varepsilon')$$

$$+ \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' | \tau_{\vec{P}}(\varepsilon') | \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \rangle \Sigma^{(\tilde{G}^{(1)})}(p_2;\varepsilon'-\varepsilon-i0) \Big\}$$

und für den Imaginärteil, unter Benutzung von (3.1.15),

$$\sigma(p_1;\varepsilon) := i\left(\tilde{\Sigma}(p_1;\varepsilon+i0) - \tilde{\Sigma}(p_1;\varepsilon-i0)\right) \qquad 7.2.3$$

$$= 2\pi \sum_{\eta'} \int d^3\vec{p}_2 \int_{-\varepsilon}^{0} d\varepsilon' \left\{ \left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right| T_{\vec{p}}(\varepsilon-\varepsilon') \left| \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right\rangle A(p_2;\varepsilon') \right\} . \qquad 7.2.4$$

Wegen der Relation (3.1.24) gilt für σ

$$\sigma(p;\varepsilon) = -2\pi\,{}^{(\tilde{\Sigma})}(p;\varepsilon+i0) . \qquad 7.2.5$$

Aus Gleichung (7.2.4) sieht man, daß $\sigma(p,\varepsilon=0)=0$ gilt in Übereinstimmung mit dem Theorem von Luttinger (LU61), das besagt, daß in jeder Ordnung der Störungstheorie in der Umgebung von $\varepsilon = 0$

$$\sigma(p;\varepsilon) = C(p)\cdot\varepsilon^2 , \quad \varepsilon \approx 0 \qquad 7.2.6$$

gilt.

Da σ mit der Breite γ der Einteilchenzustände über

$$\gamma(p) := \sigma(p, \varepsilon(p)-\mu) \qquad 7.2.7$$

zusammenhängt, folgt mithin aus (7.2.6), daß die Einteilchenbreite γ an der Fermikante verschwindet bzw. die Lebensdauer $\tau(p) = \hbar\gamma^{-1}(p)$ für $p \longrightarrow p_F$ gegen unendlich strebt.

Es liegt nahe, bei nicht zu großen Werten von $\gamma(p)$ die Spektralfunktion $A(p;\varepsilon)$ aus (3.1.22) in den Gleichungen (7.2.2) und (7.2.4) durch eine δ-Funktion zu approximieren. Andernfalls muß $A(p;\varepsilon)$ nach (3.1.22) berechnet werden. Ein geeigneter Ansatz lautet:

$$A(p;\varepsilon) = \begin{cases} z(p)\,\delta(\varepsilon - \varepsilon(p) + \mu) & \text{für} \quad \varepsilon(p) - \mu - \frac{z(p)\gamma(p)}{2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon(p) - \mu + \frac{z(p)\gamma(p)}{2} \qquad 7.2.8 \\ \frac{z(p)}{\pi}\,\Lambda(p)\,\dfrac{\frac{z(p)\gamma(p)}{2}}{(\varepsilon - \varepsilon(p) + \mu)^2 + \left(\frac{z(p)\gamma(p)}{2}\right)^2} & \text{sonst.} \quad 7.2.8' \end{cases}$$

Die Berechnung der Funktion

$$z(p) := \left(1 - \frac{\partial \Sigma^{(\tau)}(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon = \varepsilon(p) - \mu}\right)^{-1} \qquad 7.2.9$$

wurde im vorausgehenden Abschnitt angegeben (Gleichungen (7.1.1-3)). Im Unterschied zu oben ist die Impulsverteilung in der $\Lambda^{(11)}$-Methode nicht mehr durch z(p) gegeben. Die Parameterfunktion Λ(p) in (7.2.8') ist durch die Summenregel von (3.1.8) festgelegt. Einsetzen von (7.2.8-8') in (3.1.8) liefert ($\bar{\nu}$=1, vgl. Fußnote auf S. 181)

$$\Lambda(p) = 2\,(\bar{\nu} - z(p))\; z(p)^{-1}. \qquad 7.2.9'$$

Die Relation (3.1.22) führt zu folgender Definition der Einteilchenenergien:

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m} + \Sigma^{(\tau)}(p;\varepsilon(p) - \mu)\,. \qquad 7.2.10$$

Mit (7.2.8) erhält man für die Einteilchenenergie ε(p) und die Breite γ(p) die Beziehungen

$$\varepsilon(p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + \sum_{\eta'} \int^{p_F} d^3\vec{p}_2\; z(p_2) \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right| \Sigma^{(\tau)}_{\vec{p}}(\hat{\varepsilon}(p_1) + \hat{\varepsilon}(p_2)) \left| \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right\rangle \qquad 7.2.11$$

$$+ \sum_{\eta'} \int^{p_F} d^3\vec{p}_2 \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right| \tau_{\vec{p}}(\varepsilon') \left| \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right\rangle \Sigma^{(\tilde{\sigma}^{(1)})}(p_2;\varepsilon' - \hat{\varepsilon}(p_1))\,,$$

$$\gamma(p_1) = \sum_{\eta'} \int_{q_m}^{p_F} d^3\vec{p}_2\; z(p_2) \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right| \tau_{\vec{p}}(\hat{\varepsilon}(p_1) + \hat{\varepsilon}(p_2)) \left| \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right\rangle \qquad 7.2.12$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{\eta'} \int_{q_m}^{p_F} d^3\vec{p}_2\; z(p_2) \left\langle \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right| \Pi^{(\tau)}_{\vec{p}}(\hat{\varepsilon}(p_1) + \hat{\varepsilon}(p_2)) \left| \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}, \eta\eta' \right\rangle\,, \qquad 7.2.12'$$

wobei q_m implizit definiert ist durch

$$\varepsilon_q = 2\mu - \varepsilon(p_1)\,. \qquad 7.2.13$$

Anhand der Gleichungen (7.2.12) und (7.2.13) erkennen wir, daß $\gamma(p_F)=0$ gilt. Ferner folgt, daß zur Berechnung von $\varepsilon(p)$ und $\gamma(p)$ nur die "on-shell" ($\varepsilon = \hat{\varepsilon}(p_1) + \hat{\varepsilon}(p_2)$) Diagonalelemente der T-Matrix benötigt werden. Dieser Sachverhalt trifft bei der Berechnung von z(p) nicht mehr zu. In diesem Fall muß der Massenoperator $\Sigma(p;\varepsilon)$ zusätzlich in der Umgebung von $\varepsilon = \varepsilon(p)-\mu$ bestimmt werden, um die Energieableitung gemäß (7.2.9) bilden zu können.

Im nächsten Schritt geben wir die Beziehungen für den antisymmetrisierten Real- und Imaginärteil des Massenoperators $\Sigma(p;\varepsilon)$ explizit an (vgl. mit (7.1.13) und (7.2.2-4)). Man findet(*)

7.2.14

$$
{}^{(0)}\Sigma^{(\tilde{\Sigma})}(p_1;\varepsilon+i0) = \frac{1}{8}\sum_{\eta}\sum_{ST}\sum_{L}(2\eta+1)(2T+1)\,\xi_{LST}
$$

$$
\int_0^{p_F} dp_2\, p_2^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}_2} \left\{ \left({}^{(0)}\Sigma^{(\tilde{T})}_{|\vec{k}|}\left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}; \varepsilon+\hat{\varepsilon}(p_2)+i0\right)\right)^{\eta ST}_{LL} \right.
$$

$$
\left. - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \left({}^{(0)}\Pi^{(\tilde{T})}_{|\vec{k}|}\left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \varepsilon\right)\right)^{\eta ST}_{LL} \Sigma^{(\tilde{G}^{(1)})}(p_2, \varepsilon'-\varepsilon-i0) \right\},
$$

7.2.15

$$
-\frac{1}{2}\,{}^{(0)}\Gamma(p_1;\varepsilon) = {}^{(0)}\Pi^{(\tilde{\Sigma})}(p_1;\varepsilon)
$$

$$
= \frac{1}{8}\sum_{\eta}\sum_{ST}\sum_{L}(2\eta+1)(2T+1)\,\xi_{LST}
$$

$$
\int_{q_m}^{p_F} dp_2\, p_2^2 \int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}_2} \left({}^{(0)}\Pi^{(\tilde{T})}_{|\vec{k}|}\left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}; \varepsilon+\hat{\varepsilon}(p_2)\right)\right)^{\eta ST}_{LL} .
$$

Einen Ausdruck für den Realteil $\Sigma^{(\tilde{G}^{(1)})}$ der analytisch fortgesetzten Zweipunktfunktion in Gleichung (7.2.14) berechnen wir über die Spektraldarstellung (3.1.9). Einsetzen der Ausdrücke (7.2.8-8') in (3.1.9) führt nach einiger Rechnung auf

---

(*) Um die Summenregel (3.1.8) zu erfüllen, wurde in den Gleichungen (7.2.11) bis (7.2.12') z(p)≡1 gesetzt.

$$\tilde{G}^{(1)}(p;\omega \pm i0) = z_p\,(\omega - \hat{\varepsilon}_p)^{-1}$$

7.2.16

$$+ \frac{z_p \Lambda_p \alpha_p}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\omega - \hat{\varepsilon}_p}{((\omega - \hat{\varepsilon}_p)^2 + \alpha_p^2)\,\alpha_p} + \frac{1}{2((\omega - \hat{\varepsilon}_p)^2 + \alpha_p^2)} \ln \frac{(\omega - \hat{\varepsilon}_p - \alpha_p)^2}{(\omega - \hat{\varepsilon}_p + \alpha_p)^2} \right\}$$

$$\mp i\pi z_p \left\{ \delta(\omega - \hat{\varepsilon}_p) + \frac{\Lambda_p \alpha_p}{\pi} \frac{1}{(\omega - \hat{\varepsilon}_p)^2 + \alpha_p^2} \left(\theta(\omega - \hat{\varepsilon}_p - \alpha_p) + \theta(-(\omega - \hat{\varepsilon}_p) - \alpha_p)\right) \right\}$$

mit $\alpha_p \equiv \alpha(p) = \frac{1}{2} z(p)\, \gamma(p)$. 7.2.17

Da für die Einteilchenbreite $\gamma(p) \geqslant 0$ gilt und $z(p)$ $1 \geqslant z(p) > 0$ erfüllt, ist $\alpha(p)$ eine positiv definite Funktion des Impulses: $\alpha(p) \geqslant 0$.

Die Dichteverteilung der Einteilchenzustände berechnen wir mit (3.1.14):

$$n(p) = \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon\, A(p;\varepsilon) \,. \qquad 7.2.18$$

Im Unterschied zu oben ergibt sich im Rahmen der $\Lambda^{(11)}$-Theorie eine Dichteverteilung, die durch $n(p) \neq 0$ für $p > p_F$ charakterisiert ist. Davon überzeugen wir uns, indem wir in der Gleichung für die Einteilchenenergien den Massenoperator bis zum zweiten Term nach Taylor um die Stelle $\hat{\varepsilon}_p$ entwickeln. Man findet

$$\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu - \Sigma(p;\varepsilon) = (\varepsilon - \hat{\varepsilon}_p) \left(1 - \frac{\partial \Sigma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p}\right) . \qquad 7.2.19$$

Bei der Taylorentwiclung der Einteilchenbreite $\Gamma(p;\varepsilon)$ um die Stelle $\hat{\varepsilon}_p$ beschränken wir uns auf den ersten Term:

$$\Gamma(p;\varepsilon) \approx \Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p) + (\varepsilon - \hat{\varepsilon}_p) \frac{\partial \Gamma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p} . \qquad 7.2.20$$

Einsetzen der Ausdrücke (7.2.19-20) in (3.1.22) führt auf einen genäherten Ausdruck für die Spektralfunktion $A(p;\varepsilon)$, der über die Beziehung (7.2.18) die Dichteverteilung der Einteilchenzustände ergibt. Mit den Definitionen

$$a := z_p^{-2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p} \right)^2 , \qquad 7.2.21$$

$$b := \frac{1}{2} \Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p) \frac{\partial \Gamma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p} , \qquad 7.2.22$$

$$c := \left(\frac{1}{2} \Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p) \right)^2 \qquad 7.2.23$$

und

$$\Delta := \Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p) \, z_p^{-1} \qquad 7.2.24$$

findet man für die Dichte $n(p)$(*)

$$n(p) = \frac{1}{\pi} \Bigg\{ \left(\Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p) - \frac{b}{2a} \frac{\partial \Gamma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p} \right) \Delta^{-1} \left\{ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2(\mu-\varepsilon_p)a + b}{\Delta} \right) \right\} + (4a)^{-1} \frac{\partial \Gamma(p;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p} \ln\left(\frac{a\hat{\varepsilon}_p^2 - b\hat{\varepsilon}_p + c}{a\alpha^2 + b\alpha + c} \right) \Bigg\} , \qquad 7.2.25$$

(*) Die Größe α in (7.2.25) steht für die untere Integrationsgrenze im Ausdruck (7.2.18). In der Näherung $\Gamma(p;\varepsilon) \approx \Gamma(p;\hat{\varepsilon}_p)$ gemäß (7.2.20) wird der logarithmisch divergente Term nicht berücksichtigt.

Zur Diskussion der Diskontinuität der Einteilchendichte $n(p)$ bei $p=p_F$ verweisen wir auf (MI57,LU60,JLM76,EC79,MA81).

der bei Beschränkung auf den energieunabhängigen Imaginärteil des Massenoperators $\Sigma(p;\varepsilon)$ der Taylorentwicklung (7.2.20) in

$$n(p) = \frac{z_p}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2(\mu-\varepsilon_p)}{\Gamma(p,\hat{\varepsilon}_p)\, z_p}\right)\right\} \qquad 7.2.26$$

Übergeht.

Einen quantitativ geeigneteren Ausdruck für den Verlauf der Einteilchendichte erhält man mit dem Ansatz für die Spektralfunktion $A(p;\varepsilon)$ aus (7.2.8-8'). Man findet $(\bar{\nu}=1)$(*)

$$\begin{aligned} n(p) = {} & \theta(\hat{\varepsilon}_p - \alpha_p)\, \frac{2}{\pi}(\bar{\nu} - z_p)\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu-\varepsilon_p}{\alpha_p}\right)\right\} \\ & + \theta(\hat{\varepsilon}_p + \alpha_p)\, \theta(\alpha_p - \hat{\varepsilon}_p)\left\{z_p\, \theta(\mu-\varepsilon_p) + \frac{1}{2}(\bar{\nu} - z_p)\right\} \\ & + \theta(-\hat{\varepsilon}_p - \alpha_p)\left\{z_p + \frac{2}{\pi}(\bar{\nu} - z_p)\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu-\varepsilon_p}{\alpha_p}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad 7.2.27$$

Implizit kennzeichnen die Sprungfunktionen in (7.2.27) die verschiedenen Impulsintervalle, wenn

$$\hat{\varepsilon}(p) \begin{cases} < 0 & \forall\ p < p_F \\ = 0 & p = p_F \\ > 0 & \forall\ p > p_F \end{cases} \qquad 7.2.28$$

beachtet wird.

Die positiv definite Funktion $\alpha(p)$ wurde in (7.2.17) definiert. Wie man leicht sieht, reproduziert die Funktion $n(p)$ aus (7.2.27) das folgende Verhalten der Einteilchendichte:

7.2.29

i) $n(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$,

ii) $n(p) \xrightarrow[p\to 0]{} 1$,

iii) $n(p_F-\eta) - n(p_F+\eta) = z(p_F) = \left(1 - \frac{\partial \Sigma'(p;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon_{p_F}}\right)^{-1}$,

iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, A(p;\varepsilon) = \bar{\nu}$ (erfüllt via Festlegung von $\Lambda(p)$).

(*) Der Ansatz (7.2.8) macht die Ersetzung $\gamma_p \to \gamma_p + \eta$, $\eta/\gamma(0) \lesssim .01$ in (7.2.17,7.2.27) notwendig, da andernfalls $n(p)$ für wachsende Impulse p ($<p_F$) durch einen Anstieg charakterisiert ist. Ferner werden die Bedingungen ii) und iii) aus (7.2.29) nicht erfüllt.

Zur Berechnung der Energie pro Nukleon in Kernmaterie greifen wir auf (3.1.13) zurück. Kleine Werte der Einteilchenbreite $\gamma(p)$ legen den Ausdruck

$$\frac{E_0(N)}{N} = \sum_{S,T} \int^{\tilde{p}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\Sigma^{(\Sigma)}(p,\hat{\varepsilon}_p) \right) n(p) \right) \left(\sum_{S,T} \int^{\tilde{p}} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} n(p) \right)^{-1} \qquad 7.2.30$$

$$= \frac{2}{\varrho\pi^2} \int_0^{\tilde{p}} dp\, p^2\, n(p) \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\Sigma^{(\Sigma)}(p,\hat{\varepsilon}_p) \right) \qquad 7.2.30'$$

nahe ($\tilde{p}$=Abschneideimpuls, s. i) in (7.2.29)).

Da $\gamma(p) \approx 0$ nur für Impulse p in der Umgebung der Fermikante erfüllt wird, setzen wir den Ansatz (7.2.8-8') für die Spektralfunktion in (3.1.13) ein. Gleichung (7.2.30) geht mithin über in

$$\frac{E_0(N)}{N} = \frac{1}{2\varrho} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon\, A(p;\varepsilon) + \left(\frac{p^2}{2m} + \mu \right) \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon\, \lambda(p;\varepsilon) \right\} . \qquad 7.2.31$$

Der zweite Summand in (7.2.31) ergibt die Dichteverteilung der Einteilchenzustände (s. (7.2.18)). Zur Energieintegration des ersten Summanden spalten wir das Integrationsintervall, in Analogie zu Berechnung von n(p) aus (7.2.27), auf in(*)

$$\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\hat{\varepsilon}_p-\alpha_p} d\varepsilon + \int_{\hat{\varepsilon}_p-\alpha_p}^{\hat{\varepsilon}_p+\alpha_p} d\varepsilon + \int_{\hat{\varepsilon}_p+\alpha_p}^{0} d\varepsilon & \text{für} \quad \hat{\varepsilon}_p+\alpha_p < 0 \\ \int_{-\infty}^{\hat{\varepsilon}_p-\alpha_p} d\varepsilon + \int_{\hat{\varepsilon}_p-\alpha_p}^{0} d\varepsilon & \text{für} \quad \hat{\varepsilon}_p+\alpha_p > 0 \text{ und } \hat{\varepsilon}_p-\alpha_p < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon & \text{für} \quad \hat{\varepsilon}_p-\alpha_p > 0 . \end{cases} \qquad 7.2.32$$

(*) Um logarithmische Divergenzen zu umgehen, müssen die unteren Integrationsgrenzen $-\infty$ in (7.2.32) durch endliche Werte ($-Y_0$) ersetzt werden. Die Integrationen führen damit auf Ausdrücke vom Typ $\ln \frac{\hat{\varepsilon}_p^2+\alpha_p^2}{Y_0^2+\alpha_p^2}$, die wir durch "$\lim_{Y_0\to+\infty}$" $\left(\ln \frac{\hat{\varepsilon}_p^2+\alpha_p^2}{Y_0^2+\alpha_p^2}\right) = -2\alpha_p$ ersetzen. Diese Näherung ergibt für die Energie pro Nukleon nach (7.2.33) im Fall $\alpha_p = \alpha_{p_F} = 0 \;\; \forall\, p \in [0,p_F]$ einen mit Gleichung (7.2.30') identischen Ausdruck, wenn $z_p \equiv n_p$ gesetzt wird. (Die numerische Auswertung ergab $.8 \leq z_p \leq .9$, $.9 \leq n_p \leq 1 \;\; \forall\, p \in [0,p_F]$.)

Die sich anschließenden Integrationen sind trivial ausführbar und führen (7.2.31) über in

$$\frac{E_0(N)}{N} = \frac{1}{8\pi^2}\int d\rho\,\rho^2 \left\{ \left\{ -\frac{\Lambda_\rho z_\rho \alpha_\rho}{\pi} + z_\rho \hat{\varepsilon}_\rho \left(\frac{\Lambda_\rho}{4}+1\right)\right\} \theta(\mu-\varepsilon_\rho-\alpha_\rho) \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\Lambda_\rho z_\rho \alpha_\rho}{\pi}\left(\frac{\pi}{4\alpha_\rho}\hat{\varepsilon}_\rho - 1\right) \theta(\varepsilon_\rho-\mu+\alpha_\rho)\,\theta(\mu-\varepsilon_\rho+\alpha_\rho)\right\}\right\}$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\tilde{\rho}} d\rho\,\rho^2 \left(\frac{\rho^2}{2m}+\mu\right) \varkappa(\rho)\,. \qquad 7.2.33$$

Bevor wir zu Berechnung der $T^{(11)}$-Matrixelemente übergehen, stellen wir das vollständige, selbstkonsistent zu lösende System der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen zusammen. (Soweit wie möglich sind Quantenzahlen und Variable unterdrückt.)

$$T \equiv T^{(11)}_{\vec{P}}(\vec{p},\vec{p}\,';E+io) = T^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{p},\vec{p}\,';E+io) + \frac{1}{2}\fint d^3\vec{q}\; T^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{p},\vec{q},E+io) \begin{pmatrix} \Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(\vec{q},E+io) \\ \Lambda^{(G)}_{\vec{P}}(\vec{q},E+io) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q};E+io) \end{pmatrix} T^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q},\vec{p}\,';E+io)\,, \qquad 7.2.34$$

$$\Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(\vec{q},E+io) = N(\vec{q},\vec{P})\left(E-\varepsilon_{p_+}-\varepsilon_{p_-}+2\mu+io\,N(\vec{q},\vec{P})\right)^{-1}, \qquad 7.2.35$$

$$\Lambda^{(G)}_{\vec{P}}(\vec{q},E+io) = N(\vec{q},\vec{P})\left(E-\frac{p_+^2}{2m}-\frac{p_-^2}{2m}+2\mu+io\,N(\vec{q},\vec{P})\right)^{-1}, \qquad 7.2.36$$

$$\Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q},E+io) = \left(E-\frac{\vec{P}^2}{4m}+2\mu-\frac{\vec{q}^{\,2}}{m}+io\right)^{-1}, \qquad 7.2.37$$

$$N(\vec{q},\vec{P}) = 1-\theta(\mu-\varepsilon_{p_+})-\theta(\mu-\varepsilon_{p_-})\,, \qquad p_\pm := \left|\frac{\vec{P}}{2}\pm\vec{q}\right|\,, \qquad 7.2.38$$

$$T^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{p},\vec{p}\,';E+io) = 2V^{(a)}(\vec{p},\vec{p}\,') + \fint d^3\vec{q}\; V^{(a)}(\vec{p},\vec{q})\,\Lambda^{(00)}(\vec{P}_+,\vec{P}_-;E+io)\,T^{(00)}_{\vec{P}}(\vec{q},\vec{p}\,';E+io) \qquad 7.2.39$$

(Lösung via Wellenoperator $\Omega^{(00)}$: $\Omega^{(00)} = \mathbb{1} + \Lambda^{(00)} V^{(a)} \Omega^{(00)} \Rightarrow T^{(00)} = 2V^{(a)}\Omega^{(00)}$.

$V^{(a)}$: Hamada-Johnston-, Reid-Soft-Core- und Paris-Nukleon-Nukleon-Potential).

$$\Sigma^{(\Sigma)}(p_1;\hat{\varepsilon}_{p_1}+i0) = \sum_{JSTL} \oint d^3\vec{p}_2\ \bar{\xi}_{LST}\Big(\Sigma^{(T)}_{|\vec{p}_1+\vec{p}_2|}\big(\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2},\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2};\hat{\varepsilon}_{p_1}+\hat{\varepsilon}_{p_2}+i0\big)\Big)^{JST}_{LL} \qquad 7.2.40$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{JSTL}\bar{\xi}_{LST}\oint d^3\vec{p}_2\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon'\Big(\Pi^{(T)}_{|\vec{p}|}\big(\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2},\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2};\varepsilon'\big)\Big)^{JST}_{LL}\ \Sigma^{(G^{(1)})}(p_2;\varepsilon'-\varepsilon-i0),$$

$$\Sigma^{(G^{(1)})}(p_2;\varepsilon'-\varepsilon-i0) = (7.2.16), \qquad 7.2.41$$

$$\Pi^{(\Sigma)}(p_1;\hat{\varepsilon}_{p_1}+i0) = \sum_{JSTL}\bar{\xi}_{LST}\oint_{q_m} d^3\vec{p}_2\ \Big(\Pi^{(T)}_{|\vec{p}|}\big(\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2},\tfrac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2};\hat{\varepsilon}_{p_1}+\hat{\varepsilon}_{p_2}\big)\Big)^{JST}_{LL}, \qquad 7.2.42$$

$$\Gamma(p_1;\varepsilon) = -2\,\Pi^{(\Sigma)}(p_1;\hat{\varepsilon}_{p_1}), \qquad (\varepsilon_{q_m} = 2\mu-\varepsilon_{p_1}), \qquad 7.2.42'$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m} + \Sigma^{(\Sigma)}(p;\varepsilon(p)-\mu) \quad\Rightarrow\quad \hat{\varepsilon}_p = \varepsilon_p-\mu, \qquad \mu = \varepsilon_{p_F}, \qquad 7.2.43$$

$$z(p) = \Big(1-\frac{\partial\Sigma^{(\Sigma)}(p;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_p-\mu}\Big)^{-1} \quad\Rightarrow\quad \Lambda_p = 2(1-z_p)\,z_p^{-1},\ \alpha_p = \frac{z_p\gamma_p}{2}, \qquad 7.2.44$$

$$n(p) = (7.2.27). \qquad 7.2.44'$$

(In (7.2.40) und (7.2.42) wurde $\bar{\xi}_{LST} := 8^{-1}(2J+1)(2T+1)\xi_{LST}$ definiert.)

Die Gleichung der $T^{(11)}$-Matrix wurde in Kapitel 6 diskutiert. Ausgehend von Gleichung (6.2.10) diskutieren wir im ersten Schritt die Gleichung der $T^{(11)}$-Streuamplitude bei Verwendung des Galitskii-Propagators $\Lambda^{(G)}$. In diesem Fall propagieren die streuenden Nukleonen in den intermediären Streuzuständen ohne Kopplung an das umgebende Medium, so daß der Realteil des Energienenners von $\Lambda^{(G)}$ aus (3.3.14), $E+2\mu-\sum_{j=\pm}\varepsilon^0_\pm + i0\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_X$, mit (3.3.9) in

$$E+2\mu-\sum_{j=\pm}\varepsilon^0_\pm = E+2\mu-\frac{1}{m}\Big(\frac{\vec{P}^2}{4}+\vec{q}^{\,2}\Big) \qquad 7.2.45$$

$$= (Q_0+q)(Q_0-q) \qquad 7.2.46$$

mit der reellen Nullstelle

$$Q_0 := \sqrt{m\left(E - \frac{P^2}{4m} + 2\mu\right)} \qquad 7.2.46'$$

übergeht. Zur Auswertung der in Gleichung (6.2.10) auftretenden Hauptwertintegrale der Gestalt

$$I^{(G)}_{LL'} := P\int_0^\infty dq\; q^2 \frac{\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \left| T^{(00)}_{LL'}(P,q;E-\frac{P^2}{4m}+2\mu)\right|^2}{E - \sum_{j=1} \hat{\varepsilon}^0(\langle P_j\rangle)} \qquad 7.2.47$$

definieren wir die Hilfsfunktion (JLM74)

$$B_{LL'}(P,q;E) := \langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \left| T^{(00)}_{LL'}(P,q;\; E-\frac{P^2}{4m}+2\mu)\right|^2 \qquad 7.2.48$$

und schreiben für das Hauptwertintegral unter Verwendung von (7.2.46) und (7.2.48)

$$I^{(G)}_{LL'} = -P\int_0^\infty dq\; q^2\; B_{LL'}(P,q;E)\,(q^2-Q_0^2)^{-1} \qquad 7.2.49$$

$$= -P\int_{\mathbb{G}} dq\; q^2\; B_{LL'}(P,q;E)\,(q^2-Q_0^2)^{-1} - P\int_{\mathbb{R}_0^+\setminus\mathbb{G}} dq\; q^2\, B_{LL'}(P,q,E)(q^2-Q_0^2)^{-1}. \qquad 7.2.49'$$

In (7.2.49') haben wir von $\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x = 1$ für $\frac{P^2}{4}+q^2-p_F^2>0$ und $\left|q-\frac{P}{2}\right|-p_F>0$ (s. Gleichung (4.4.7)) Gebrauch gemacht. Diesen Sachverhalt drücken wir durch Definition der Menge $\mathbb{G}$ aus:

$$\mathbb{G} := \left\{ q \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; q \le \sqrt{p_F^2 - \frac{P^2}{4}} \;\wedge\; \left|q-\frac{P}{2}\right| \le p_F \right\}, \qquad 7.2.50$$

$$\langle N_0(\vec{q},\vec{P})\rangle_x \begin{cases} = 1 & \forall\; q \in \mathbb{R}_0^+\setminus\mathbb{G} \\ \neq 1 & \forall\; q \in \mathbb{G} \end{cases} . \qquad 7.2.51$$

Mit Hilfe der Relation (BF70)

$$P\int_0^\infty dq\; \frac{f(q)}{q^2-q_0^2} = f(q_0)\,(2q_0)^{-1}\, ln\left(\frac{\varkappa-q_0}{\varkappa+q_0}\right) + P\int_0^\infty dq\; \frac{f(q)-f(q_0)}{q^2-q_0^2} \qquad 7.2.52$$

schließt sich an (7.2.49-49')

$$I^{(G)}_{LL'} = \frac{1}{2} Q_0 \, B_{LL'}(P, Q_0, E) \; \ln\left(\frac{\varkappa + Q_0}{\varkappa - Q_0}\right)$$

$$- P \int_{q \in G} dq \, \frac{\left(q^2 B_{LL'}(P, q; E) - Q_0^2 \, B_{LL'}(P, Q_0, E)\right)}{q^2 - Q_0^2} - P \int_{q \notin G} dq \, q^2 \, \frac{B_{LL'}(P, q; E)}{q^2 - Q_0^2} \qquad 7.2.53$$

an. Die Integrationsgrenze $\varkappa$ in (7.2.53) ist via (7.2.50) festgelegt. Für Impulswerte $q \notin G$ ist (7.2.47) mit dem Hauptwertintegral des $\Lambda^{(00)}$-Propagators identisch:

$$I^{(G)}_{LL'} - P \int_{q \in G} dq \, q^2 \, \left| T^{(00)}_{LL'}(P, q; E) \right|^2 \left(E - \frac{P^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m} \right)^{-1} = 0 \, . \qquad 7.2.54$$

Explizit findet man für die Differenz der Hauptwertintegrale(*) in (6.2.10)(**)

$$P \int_{q \in G} dq \, q^2 \, \frac{B_{LL'}(P, q, E)}{E - \frac{P^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} - P \int_{q \in G} dq \, q^2 \, \frac{\left| T^{(00)}_{LL'}(P, q, E) \right|^2}{E - \frac{P^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} \qquad 7.2.55$$

$$= \frac{1}{2} Q_0 \cdot \left(B_{LL'}(P, Q_0; E) - \left| T^{(00)}_{LL'}(P, Q_0; E) \right|^2 \right) \ln\left(\frac{\varkappa + Q_0}{\varkappa - Q_0}\right)$$

$$- P \int_{q \in G} dq \, \frac{q^2 \left(B_{LL'}(P, q, E) - \left| T^{(00)}_{LL'}(P, q, E) \right|^2 \right) - Q_0^2 \left(B_{LL'}(P, Q_0; E) - \left| T^{(00)}_{LL'}(P, Q_0, E) \right|^2 \right)}{q^2 - Q_0^2} \, .$$

Im Fall der ungekoppelten Partialwellen schließt sich für die antisymmetrisierte $T^{(11)}$-Matrix von Gleichung (6.2.10)

(*) Der Fall, daß der Integrand keine reellen Nullstellen besitzt ($E - \frac{P}{4m} + 2\mu < 0$), läßt sich auf triviale Weise behandeln, wobei die Aufteilung des Integrationsintervalls gemäß (7.2.50-51) ihre Gültigkeit behält.

(**) Wir verwenden in den Gleichungen die nicht antisymmetrisierten Werte der $T^{(00)}$-Matrix.

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}T_{LL}^{(11)}(p,p,E) = {}&{}^{(0)}T_{LL}^{(00)}(p,p;\, E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu) \qquad 7.2.56\\
&+ i\,\tfrac{\pi}{2}\,Q_0\,\Big|T_{LL}^{(00)}(p,Q_0;\, E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\,\big(1-\langle N_0(Q_0,\hat{p})\rangle_x\,\mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_0,\hat{p})\rangle_x)\big)\\
&+ \tfrac{1}{2}\,Q_0\;B_{LL}(p,Q_0;E) - \Big|T_{LL}^{(00)}(p,Q_0;E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu\Big|^2\,\ln\Big(\frac{\varkappa+Q_0}{\varkappa-Q_0}\Big)\\
&- P\int_{q\in\mathbb{C}} dq\,\Big\{q^2\big(B_{LL}(p,q;E) - \Big|T_{LL}^{(00)}(p,q;E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\big)\\
&\qquad - Q_0^2\,\big(B_{LL}(p,Q_0;E) - \Big|T_{LL}^{(00)}(p,Q_0,E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\big)\Big\}\,(q^2-Q_0^2)^{-1}
\end{aligned}
$$

an.

Im Fall des gekoppelten $^3S_1+{}^3D_1$-Kanals lautet (7.2.56) ($T^{(ij)^{JST}} = T^{(ij)^{110}}$, ij=00 oder 11)$^{(*)}$

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}T_{\nu}^{(11,110)}(p,p;E) = {}&{}^{(0)}T_{\nu}^{(00)\,110}(p,p,\, E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu) \qquad 7.2.57\\
&+ i\,\tfrac{\pi}{2}\,Q_0\,\big(1-\langle N_0(Q_0,\hat{p})\rangle_x\,\mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_0,\hat{p})\rangle_x)\big)\\
&\qquad \sum_{i_\nu=\nu_1}^{\nu_2}\Big|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(Q_0,p,E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\\
&+ \tfrac{1}{2}\,Q_0\,\ln\Big(\frac{\varkappa+Q_0}{\varkappa-Q_0}\Big)\sum_{i_\nu=\nu_1}^{\nu_2}\Big(B_{i_\nu}^{110}(Q_0,p;E) - \Big|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(Q_0,p;E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\Big)\\
&- \sum_{i_\nu=\nu_1}^{\nu_2} P\int_{q\in\mathbb{C}} dq\,\Big\{q^2\Big(B_{i_\nu}^{110}(q,p;E) - \Big|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(q,p;E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\Big)\\
&\qquad - Q_0^2\,\Big(B_{i_\nu}^{110}(Q_0,p,E) - \Big|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(Q_0,p,E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2\Big)\Big\}\\
&\qquad (q^2-Q_0^2)^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Der Summationsindex i_ν in (7.2.57) durchläuft, je nach Partialwelle, die Werte in der rechten Spalte der Tabelle

---

(*) Analog zu (7.2.48) definieren wir $B_{i_\nu}^{110}(p,q;E) := \langle N_0(\vec{q},\vec{p})\rangle_x \Big|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(p,q;E-\tfrac{p^2}{4m}+2\mu)\Big|^2$

Partial-welle	L L'	ν	ν_1	ν_2
$^3S_1$	0 0	00	00	20
$^3D_1$	2 2	22	22	02

In der ersten Zeile der Tabelle stehen die Quantenzahlen der Relativbahndrehimpulse L und L' im Fall der $T^{(11)\,110}_{L=0\ L'=0}$-Matrixelemente. Der zweiten Zeile entnehmen wir die Quantenzahlen zur Berechnung der $T^{(11)\,110}_{L=2\ L'=2}$-Amplituden.

Im nächsten Schritt diskutieren wir die $T^{(11)}$-Gleichung bei Verwendung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators (6.2.2'). Im Unterschied zu $\Lambda^{(G)}$ tritt in (6.2.2') die volle Einteilchenenergie ε_p von (7.2.10) im Energienenner auf. Um diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen, führen wir die Impulsintervalle $[0,p_F]$, $(p_F,\bar{p}]$ und $(\bar{p},\infty)$ ein. Für das effektive Einteilchenpotential (7.1.6) wählen wir den Ansatz

7.2.58

$$V(p) = \begin{cases} V_p^< := a\,p^2 + V_0^< & \forall\, p \in [0, p_F] \\ V_p^> := a\,(p-p_F)^2 + V_0^> & \forall\, p \in (p_F, \bar{p}] \\ V_p^{>>} = 0 & \forall\, p \in (\bar{p}, \infty), \end{cases}$$

7.2.59

so daß $a := (\mu - V_0^<)\,p_F^{-2} - (2m)^{-1} = (2\,\tilde{m}^*)^{-1}$, $\tilde{m}^* := m\,m^*\,(m-m^*)^{-1}$, $m^* := p_F^2\,(2(\mu - V_0^<))^{-1}$,

7.2.60

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} \varepsilon^<(p) = \dfrac{p^2}{2m^*} + V_0^< & \forall\, p \in [0, p_F] \\ \varepsilon^>(p) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2\tilde{m}^*}(p-p_F)^2 + V_0^> & \forall\, p \in (p_F, \bar{p}] \\ \varepsilon^{>>}(p) = \dfrac{p^2}{2m} & \forall\, p \in (\bar{p}, \infty) \end{cases}$$

(7.1.2) zufolge gilt. Die Tiefen der Einteilchenpotentiale $V_0^<$ und

$V_0^>$ sind durch

$$V_0^< := \Sigma(0;\, \hat{\varepsilon}(0)) \,, \qquad 7.2.61$$

$$V_0^> := \Sigma(\bar{p};\, \hat{\varepsilon}(\bar{p})) - \frac{(\bar{p}-p_F)^2}{2\tilde{m}^*} \qquad 7.2.62$$

gegeben. Für spätere Zwecke definieren wir

$$M := m\,\tilde{m}^*(m+\tilde{m}^*)^{-1} = 1 - m^* m^{-1} \,, \qquad 7.2.63$$

$$Y^\nu(q) := \left((\delta_{\nu 0} + \delta_{\nu >})\, m^{-1} + \delta_{\nu <}\, m^{*-1}\right)\left(\frac{p^2}{4} + q^2\right) + \delta_{\nu >}\left(\frac{p^2}{4} + (q-p_F)^2\right)\tilde{m}^{*-1} + 2(\delta_{\nu <} + \delta_{\nu >})\, V_0^\nu \,, \qquad 7.2.64$$

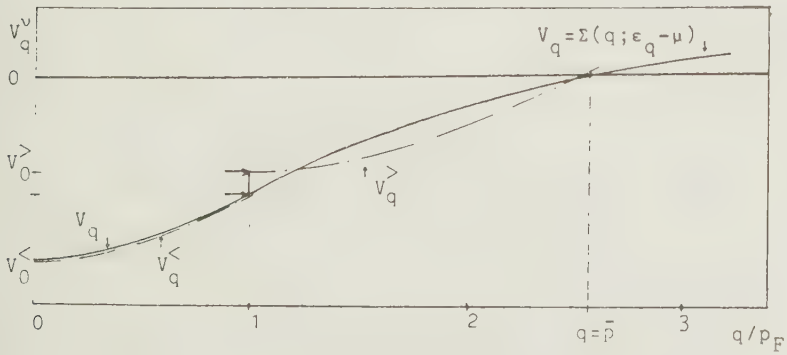
wobei $\nu \in \{>,<,0\}$ ist.

Der Impuls $\bar{p}$ in den obigen Ausdrücken ist implizit durch die Bedingungsgleichung

$$V^>(\bar{p}) = \Sigma(\bar{p};\, \varepsilon(\bar{p}) - \mu) = 0 \qquad 7.2.65$$

festgelegt.

Schematisch liegt bei der Approximation (7.2.58) des effektiven Einteilchenpotentials folgender Sachverhalt vor:



Es ist zweckmäßig, die Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$ von (7.2.60) in der Form

$$\varepsilon_{p_\pm} \equiv \varepsilon(\langle p_\pm \rangle) = \Big\{ \varepsilon^<_{p_\pm}\, \theta(p_F - p_\pm) + \varepsilon^>_{p_\pm}\, \theta(p_\pm - p_F)\, \theta(\bar{p} - p_\pm) + \varepsilon^{>>}_{p_\pm}\, \theta(p_\pm - \bar{p}) \Big\} \qquad 7.2.66$$

in den $\Lambda^{(11)}$-Propagator einzusetzen. Nach einiger Rechnung findet man

$$\sum_{j=\pm} \varepsilon(\langle p_j \rangle) \approx \left[\frac{1}{m^*} \left(\frac{p^2}{4} + q^2 \right) + 2V_0^< \right] \theta(p_F - q) \qquad 7.2.67$$

$$+ \left[\frac{1}{m} \left(\frac{p^2}{4} + q^2 \right) + \frac{1}{\tilde{m}^*} \left(\frac{p^2}{4} + q^2 - 2q p_F + p_F^2 \right) + 2V_0^> \right]$$

$$\theta(q - p_F) \; \theta(\bar{p} - q)$$

$$+ \frac{1}{m} \left(\frac{p^2}{4} + q^2 \right) \; \theta(q - \bar{p}) ,$$

so daß Gleichung (6.2.2') nach Einsetzen von (7.2.67) in

$$\Lambda^{(11)}(q, p, E) \approx \frac{\langle N_0(q, p) \rangle_x}{E - \{ Y_q^< \theta(p_F - q) + Y_q^> \theta(q - p_F) \theta(\bar{p} - q) + Y_q^0 \theta(q - \bar{p}) \} + 2\mu + i0 \langle N_0(q, p) \rangle_x} \qquad 7.2.68$$

übergeht. Der Propagator (7.2.68) besitzt, je nach Vorgabe von q, die reellen Wurzeln (vgl. mit (7.2.45-46')

$$Q_0 \Big|_{q \in [0, p_F]} = \sqrt{m^* \left(E - \frac{p^2}{4m^*} - 2\hat{V}_0^< \right)} \qquad 7.2.69$$

mit $\hat{V}_0^< := V_0^< - \mu , \qquad \hat{V}_0^> := V_0^> - \mu ,$ 7.2.70

$$Q_\pm \Big|_{q \in (p_F, \bar{p}]} := \frac{M p_F}{\tilde{m}^*} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{m}^*}{M p_F} \right)^2 \left(\frac{p^2}{4m} + M \left(\frac{p_F^2}{\tilde{m}^*} + 2\hat{V}_0^> - E \right) \right)} \right) . \qquad 7.2.71$$

Mit den Gleichungen (7.2.69-71) formen wir den Realteil des Energienenners von (7.2.68) um in

$$E - Y_q^< + 2\mu \Big|_{q \in [0, p_F]} = \frac{1}{m^*} (Q_+ + q)(Q_0 - q) , \qquad 7.2.72$$

$$E - Y_q^> + 2\mu \Big|_{q \in (p_F, \bar{p}]} = \left(-M(q + Q_+) \right)^{-1} (q - Q_-)(q^2 - Q_+^2) . \qquad 7.2.73$$

(Nach (7.2.63) gilt $M/\tilde{m}^* \leq 1$ ($m^*/m>0$), so daß $Q_- < p_F$ ist). Mit der Zerlegung (7.2.72-73) können die auftretenden Hauptwertintegrale in der $T^{(11)}$-Gleichung (6.2.10) umgeformt werden. Wir gehen in entsprechender Weise vor wie im Fall des Galitskii-Propagators und finden

$$I_{LL'}^{(11)} := \int_0^\infty dq\, q^2 \frac{B_{LL'}(p,q;E)}{E-\varepsilon_+-\varepsilon_-+2\mu+i0\,\langle N_0(q,p)\rangle_x} - \int_0^\infty dq\, q^2 \frac{|T^{(00)}(p,q;E-\frac{p^2}{4m}+2\mu)|^2}{E-\frac{p^2}{4m}+2\mu-\frac{q^2}{m}} \tag{7.2.74}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P\int_0^{p_F} dq\, q^2 \frac{(-)\,B_{LL'}(p,q;E)}{\frac{1}{m^*}(q^2-Q_0^2)} - i\pi\frac{m^*}{2}Q_0\, \mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_0,p)\rangle_x)\, B_{LL'}(Q_0,p;E) \\ \int_0^{p_F} dq\, q^2 \frac{B_{LL'}(p,q;E)}{E-\gamma_q^2+2\mu} \end{array} \right.$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \int_{p_F}^{\bar{p}} dq\, q^2 \frac{(-M)\,B_{LL'}(p,q;E)}{E-\gamma_q^2+2\mu} \\ P\int_{p_F}^{\bar{p}} dq\, q^2 \frac{B_{LL'}(p,q;E)\,(q+Q_+)}{(q-Q_-)}\frac{1}{(q^2-Q_+^2)} + i\pi\frac{Q_+^2 M}{Q_+-Q_-}\,\mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_+,p)\rangle_x)\, B_{LL'}(Q_+,p;E) \end{array} \right.$$

$$- \int_0^{\bar{p}} dq\, q^2 \frac{|T_{LL'}^{(00)}(p,q;E-\frac{p^2}{4m}-2\mu)|^2}{E-\frac{p^2}{4m}+2\mu-\frac{q^2}{m}} .$$

Im nächsten Schritt benötigen wir

$$P\int_a^b dq \frac{1}{(q^2-q_0^2)} = \frac{1}{2q_0}\ln\frac{(b-q_0)(q_0+a)}{(b+q_0)(q_0-a)}, \tag{7.2.75}$$

so daß

$$P\int_a^b dq \frac{f(q)}{q^2-q_0^2} = \frac{f(q_0)}{2q_0}\ln\frac{(b-q_0)(q_0+a)}{(b+q_0)(q_0-a)} + P\int_a^b dq \frac{f(q)-f(q_0)}{q^2-q_0^2} \tag{7.2.76}$$

gilt.

Mit (7.2.76) schließt sich für $I^{(11)}_{LL'}$ aus (7.2.74) der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
I^{(11)}_{L=L'} = \Big\{ & \frac{m^4}{2} Q_0 B_{LL}(p, Q_0; E) \ln\left(\frac{p_F + Q_0}{p_F - Q_0}\right) \\
& - p \int_0^{p_F} dq \, \frac{m^4 \left(q^2 B_{LL}(p, q; E) - Q_0^2 B_{LL}(p, Q_0; E)\right)}{q^2 - Q_0^2} \\
& + \int_{p_F}^{\bar{p}} dq \, q^2 \frac{B_{LL}(p, q; E)}{E - Y_q^> + 2\mu} - \int_0^{\bar{p}} dq \, q^2 \frac{\left| T^{(00)}\left(p, q; E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu\right)\right|^2}{E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} \\
& - i \frac{m^4}{2} \pi Q_0 \operatorname{sgn}(\langle N_0(Q_0, p)\rangle_x) \, B_{LL}(p, Q_0; E) \Big\} \, \Theta(p_F - Q_0)
\end{aligned}
\tag{7.2.77}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \Big\{ \frac{-M Q_+^2 B_{LL}(p, Q_+; E)}{Q_+ - Q_-} \ln \frac{(\bar{p} - Q_+)(Q_+ + p_F)}{(\bar{p} + Q_+)(Q_+ - p_F)} \\
& + (-M) p \int_{p_F}^{\bar{p}} dq \left(\frac{q^2 B_{LL}(p, q; E)(q + Q_+)}{q - Q_-} - \frac{2 Q_+^3 B_{LL}(p, Q_+, E)}{Q_+ - Q_-} \right) (q^2 - Q_+^2)^{-1} \\
& + \int_0^{p_F} dq \, q^2 \frac{B_{LL}(p, q; E)}{E - Y_q^< + 2\mu} - \int_0^{\bar{p}} dq \, q^2 \frac{\left| T^{(00)}\left(p, q; E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu\right)\right|^2}{E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} \\
& - i \pi \frac{Q_+^2 M}{Q_+ - Q_-} \operatorname{sgn}(\langle N_0(Q_+, p)\rangle_x) \, B_{LL}(p, Q_+, E) \Big\} \, \Theta(Q_+ - p_F)
\end{aligned}
$$

an, wobei die Θ-Funktionen jeweils den Bereich der Singularität im $\Lambda^{(11)}$-Propagator (7.2.68) kennzeichnen.

Die Gleichung der $T^{(11)}$-Matrix im gekoppelten $^3S_1 + {}^3D_1$-Kanal geben wir explizit an. In Analogie zu Gleichung (7.2.57) und der sich an

schließenden Tabelle findet man ($\tilde{E} := E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu$)

7.2.78

$$
\begin{aligned}
{}^{(a)}T_{\nu}^{(11)\,110}(p, p; E) = {}^{(a)}T_{\nu}^{(00)\,110}(p, p; \tilde{E})
&+ \sum_{i_\nu = u_1}^{u_2} \Big\{ \frac{m^*}{2} Q_0 \ln\Big(\frac{p_F + Q_0}{p_F - Q_0}\Big) \; B_{i_\nu}^{110}(Q_0, p; E) \\
&- p \int_0^{p_F} dq \; m^* \big(q^2 B_{i_\nu}^{110}(q, p; E) - Q_0^2 \, B_{i_\nu}^{110}(Q_0, p; E) \big) (q^2 - Q_0^2)^{-1} \\
&+ \int_{p_F}^{\bar{p}} dq \; q^2 \frac{B_{i_\nu}^{110}(q, p; E)}{E - Y_q^> + 2\mu} - p \int_0^{\bar{p}} dq \; q^2 \frac{|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(q, p; \tilde{E})|^2}{E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} \\
&- i \frac{m^*}{2} \pi \, Q_0 \, \mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_0, p) \rangle_x) \; B_{i_\nu}^{110}(Q_0, p; E) \Big\} \, \theta(p_F - Q_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i_\nu = u_1}^{u_2} \Big\{ \frac{-M Q_+^2}{Q_+ - Q_-} \ln \frac{(\bar{p} - Q_+)(Q_+ + p_F)}{(\bar{p} + Q_+)(Q_+ - p_F)} \; B_{i_\nu}^{110}(Q_+, p; E) \\
&+ (-M) p \int_{p_F}^{\bar{p}} dq \; q^2 \Big(\frac{B_{i_\nu}^{110}(q, p; E)(q + Q_+)}{q - Q_-} - \frac{2 Q_+^3 \, B_{i_\nu}^{110}(Q_+, p; E)}{Q_+ - Q_-} \Big) (q^2 - Q_+^2) \\
&+ \int_0^{p_F} dq \; q^2 \frac{B_{i_\nu}^{110}(q, p; E)}{E - Y_q^< + 2\mu} - \int_0^{\bar{p}} dq \; q^2 \frac{|T_{i_\nu}^{(00)\,110}(q, p; E)|^2}{E - \frac{p^2}{4m} + 2\mu - \frac{q^2}{m}} \\
&+ i \pi \frac{Q_+^2 M}{Q_+ - Q_-} \, \mathrm{sgn}(\langle N_0(Q_+, p) \rangle_x) \; B_{i_\nu}^{110}(Q_+, p; E) \Big\} \, \theta(Q_+ - p_F).
\end{aligned}
$$

7.3 Polarisations- und Korrelationskorrekturen in der $\Lambda^{(11)}$-Näherur für Kernmaterie.

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen (7.2.14-15) für Real- und Imaginärteil des Massenoperators Σ im Hinblick auf einen Vergleich mit der störungstheoretischen Entwicklung von Σ im Rahmen der Brueckner-Theorie für unendliche Fermisysteme (JLM76,SM80,SM80+ MA81) untersucht.

Für die Modellrechnung wird der Ansatz (7.2.16) der Greenschen Zweipunktfunktion $\tilde{G}^{(1)}(p;\varepsilon\pm io)$ benutzt. Für unsere Zwecke ist die Beschränkung auf den ersten Term des Real- und Imaginärteils von (7.2.16) hinreichend(*):

$$\tilde{G}^{(1)}(p;\varepsilon\pm io) = z_p\,(\varepsilon-\hat{\varepsilon}_p)^{-1} \mp i\pi\, z_p\, \delta(\varepsilon-\hat{\varepsilon}_p). \qquad 7.3.1$$

Mit Hilfe von Gleichung (7.3.1) lauten die Ausdrücke für die Spektr funktion $A(p;\varepsilon)$ (via (3.1.15)) und den Realteil der $G^{(1)}$-Funktion

$$A_{p_2}(\varepsilon') = \Xi^{<}_{p_2}\,\delta(\varepsilon'-\hat{\varepsilon}_{p_2})\,\theta(-\varepsilon') + \Xi^{>}_{p_2}\,\delta(\varepsilon'-\hat{\varepsilon}_{p_2})\,\theta(\varepsilon'), \qquad 7.3.2$$

$$\Sigma^{(G^{(1)})}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon\pm io) = \Xi_{p_2}\,(\varepsilon'-\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2})^{-1}, \qquad 7.3.3$$

wobei z_p in (7.3.1) durch

$$\Xi_{p_2} = \Xi(p_2) := \Xi^{<}(p_2)\,\theta(-\varepsilon) + \Xi^{>}(p_2)\,\theta(\varepsilon) \qquad 7.3.4$$

(*) Der Ansatz (7.3.1) für die Zweipunktfunktion gründet auf $\gamma(p)\equiv 0$ für alle Impulse $p\in[0,p_1^*]$ (die physikalische Bedeutung von $\gamma($ wurde im vorausgehenden Abschnitt diskutiert). Mithin besitzen in unserer Modellrechnung alle Einteilchenzustände die Lebensdauer $\tau=\infty$, während in Strenge dies nur auf den Einteilchenzustand mit $p=p_F$ zutrifft. (Der Impuls p_1^* wird in Kapitel 8.5 definiert.)

mit

$$\Xi^{<}(p_2) := \begin{cases} z(p_2) & \forall\, p_2 < p_F \\ 0 & \forall\, p_2 > p_F \end{cases}, \qquad \Xi^{>}(p_2) := \begin{cases} 0 & \forall\, p_2 < p_F \\ 1 - z(p_2) & \forall\, p_2 > p_F \end{cases} \qquad 7.3.4'$$

ersetzt wurde(*).

Der zweite Summand in (7.3.2) trägt der Besetzungszahlverteilung der Einteilchenzustände für Energien $\varepsilon' > 0$ Rechnung und ist konsistent mit der Summenregel von (3.1.8).

Mit Gleichung (7.3.2) findet man für den $\Lambda^{(11)}$-Propagator über die Beziehung (3.2.4)

$$\tilde{\Lambda}^{(11)}(p_1, p_2; E) = \tilde{\Lambda}^{(11)}_{PP}(p_1, p_2; E) + \tilde{\Lambda}^{(11)}_{HH}(p_1, p_2, E), \qquad 7.3.5$$

$$\tilde{\Lambda}^{(11)}_{PP}(p_1, p_2; E) := \frac{\theta(\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{p_2})\;\Xi^{>}(p_1)\;\Xi^{>}(p_2)}{E - \hat{\varepsilon}_{p_1} - \hat{\varepsilon}_{p_2} + 2i0\left(\theta(\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{p_2}) - \theta(-\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\right)}, \qquad 7.3.6$$

$$\tilde{\Lambda}^{(11)}_{HH}(p_1, p_2; E) := -\frac{\theta(-\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\;\Xi^{<}(p_1)\;\Xi^{<}(p_2)}{E - \hat{\varepsilon}_{p_1} - \hat{\varepsilon}_{p_2} + 2i0\left(\theta(\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{p_2}) - \theta(-\hat{\varepsilon}_{p_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\right)}, \qquad 7.3.7$$

wobei die Propagation der streuenden Nukleonen mit den Impulsen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ nach (7.3.5) in einen Teilchen-Teilchen- ($\tilde{\Lambda}^{(11)}_{PP}$) und einen Loch-Loch- ($\Lambda^{(11)}_{HH}$) Anteil aufgespalten wurde.

Für die weitere Rechnung werden folgende Relationen gebraucht. Ausgehend von der Operatorgleichung der T-Matrix (2.3.4)

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\left(V^{(a)^{-1}} - \Lambda\right) \qquad 7.3.8$$

(*) Die numerische Auswertung der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen ergab für die Besetzungszahlverteilung $n(p) = \langle\Phi_0|\psi^{+}_{\vec{p}}\psi_{\vec{p}}|\Phi_0\rangle$ des wechselwirkenden (wahren) Grundzustandes $|\Phi_0\rangle$ (Gleichungen (3.1.14) und (7.2.27)) $.9 \lesssim n(p) \lesssim 1$ für $p < p_F$ und $n(p) \lesssim 10^{-2}$ für $p > p_F$, was die Ersetzung $(n(p) - .1) \approx z(p) \longrightarrow \Xi(p)$ rechtfertigt.

findet man

$$\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+io) - \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon-io) = \frac{1}{2}\,\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+io) \left(\tilde{\Lambda}^{(n)}(\varepsilon+io) - \tilde{\Lambda}^{(n)}(\varepsilon-io)\right)\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon-io)\,. \tag{7.3.9}$$

Mit der Definition

$$\bar{N}(q_1,q_2) := \Xi^{>}_{q_1}\,\Xi^{>}_{q_2}\,\theta(\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{q_2}) - \Xi^{<}_{q_1}\,\Xi^{<}_{q_2}\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \tag{7.3.10}$$

schließt sich (vgl. Kapitel 3)

$$\begin{aligned}&\langle \vec{p}_1\,\vec{p}_2 \,|\, \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+io) - \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon-io) \,|\, \vec{p}_1{}'\,\vec{p}_2{}'\rangle \\ &= \frac{\pi}{i} \int d^3\vec{q}_1 \int d^3\vec{q}_2 \;\langle \vec{p}_1\,\vec{p}_2 \,|\, \tilde{T}(\varepsilon+io) \,|\, \vec{q}_1\,\vec{q}_2\rangle\; \bar{N}(q_1,q_2)\;\delta(\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \\ &\qquad \langle \vec{q}_1\,\vec{q}_2 \,|\, \tilde{T}(\varepsilon-io) \,|\, \vec{p}_1{}'\,\vec{p}_2{}'\rangle\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

an, da

$$\frac{i}{2\pi}\left(\tilde{\Lambda}^{(n)}(q_1,q_2,\varepsilon+io) - \tilde{\Lambda}^{(n)}(q_1,q_2;\varepsilon-io)\right) = \bar{N}(q_1,q_2)\,\delta(\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \tag{7.3.12}$$

gilt.

Den Massenoperator spalten wir, in Analogie zu den Gleichungen (7.2.2) und (7.2.4), in Real- und Imaginärteil auf:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) = \frac{1}{2}\sum_{p_2}\int d^3\vec{p}_2 \Bigg\{ &\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \left(\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+\varepsilon'+io) - \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon-\varepsilon'-io)\right) A_{p_2}(\varepsilon') \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} d\varepsilon' \left(\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon'+io) - \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon'-io)\right) \\ &\qquad \left(\tilde{G}^{(a)}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon-io) + \tilde{G}^{(h)}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon+io)\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{7.3.13}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) &= \frac{1}{2i}\left(\tilde{\Sigma}_{p_1}(\varepsilon+io) - \tilde{\Sigma}_{p_1}(\varepsilon-io)\right) \\ &= \theta(\varepsilon)\;\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) - \theta(-\varepsilon)\;\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon-io) \\ &= \theta(\varepsilon)\,\frac{1}{2i}\sum_{p_2}\int d^3\vec{p}_2 \int_{-\varepsilon}^{0} d\varepsilon' \left(\tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+\varepsilon'+io) - \tilde{T}^{(n)}(\varepsilon+\varepsilon'-io)\right) A_{p_2}(\varepsilon') \\ &\quad + \theta(-\varepsilon)\;\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io)\,.\end{aligned} \tag{7.3.14}$$

Einsetzen von (7.3.2-3) und (7.3.11) führt die Beziehungen (7.3.13) und (7.3.14) über in ($\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$, $\sum_{\eta_2} \leftrightarrow \sum_{\mathcal{H}\mathcal{T}L}$)

7.3.15

$$\Sigma^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) = \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right| \Sigma^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+io) \left| \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}\theta(-\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{>}_{p_2} \int_{\tilde{\vec{q}}_1} d^3\vec{q}_1 \int_{\tilde{\vec{q}}_2} d^3\vec{q}_2 \; \Xi^{<}_{q_1} \Xi^{<}_{q_2} \Big\{ \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{P})$$

$$\left| \left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right| \tilde{T}^{(m)}_{\vec{P}}(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}+io) \left| \frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2}\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 \right\rangle \right|^2$$

$$\rho \; \frac{\theta(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}-\varepsilon)\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2})}{\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}} \Big\}$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\theta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\varepsilon'$$

$$\left\{ \theta(-\varepsilon') \left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right| 2i\,\Pi^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon'-\varepsilon-io) \left| \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right\rangle \frac{\rho}{\varepsilon'-\hat{\varepsilon}_{p_2}} \right\}$$

und

7.3.16

$$\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) = \theta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \; \theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{p_1}+\varepsilon)$$

$$\left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right| \Pi^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+io) \left| \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right\rangle$$

$$- \theta(\varepsilon) \frac{1}{2} \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{>}_{p_2} \int_{\tilde{\vec{q}}_1} d^3\vec{q}_1 \int_{\tilde{\vec{q}}_2} d^3\vec{q}_2 \; \Xi^{<}_{q_1} \Xi^{<}_{q_2} \Big\{ \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{P})$$

$$\theta(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}-\varepsilon)\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \left| \left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\eta_1\eta_2 \right| \tilde{T}^{(m)}_{\vec{P}}(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}+io) \left| \frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2}\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 \right\rangle \right|^2$$

$$\delta(\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2}-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \Big\} .$$

Für den Realteil $\Sigma^{(\tilde{\Sigma})}_{\text{phys}}(p_1;\varepsilon)=\Sigma^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io)$ und Imaginärteil $\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{\text{phys}}(p_1;\varepsilon)=(\theta(\varepsilon)-\theta(-\varepsilon))\,\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io)$ des "physikalischen" Massenoperators von (3.1.33) findet man

$$\Sigma_{\text{phys}}(p_1;\varepsilon) = \tilde{\Sigma}^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) + i(\theta(\varepsilon)-\theta(-\varepsilon))\,\Pi^{(\tilde{\Sigma})}_{p_1}(\varepsilon+io) \qquad 7.3.17$$

$$= \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \; \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \Sigma^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+i0) \,|\, \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \rangle$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\theta(-\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{>}_{p_2} \; \oint_{\tilde{\eta}_1} d^3\vec{q}_1 \; \oint_{\tilde{\eta}_2} d^3\vec{q}_2 \; \Big\{ \Xi^{<}_{q_1} \; \Xi^{<}_{q_2} \; \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{P})$$

$$|\langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \tilde{T}^{(m)}_{\vec{P}}(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}+i0) \,|\, \tfrac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2}\, \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 \rangle|^2 \; P\, \frac{\delta(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}-\varepsilon)\;\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2})}{\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}} \Big\}$$

$$- \tfrac{1}{\pi}\,\theta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\varepsilon'$$

$$\Big\{ \theta(-\varepsilon') \,\langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \Pi^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon'+\varepsilon+i0) \,|\, \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \rangle \; P\, \frac{1}{\varepsilon'-\hat{\varepsilon}_{p_2}} \Big\}$$

$$+ i \Big\{ \theta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \Big\{ \Xi^{<}_{p_2} \; \theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\,\theta(\hat{\varepsilon}_{p_2}+\varepsilon)$$

$$\langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \Pi^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+i0) \,|\, \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \rangle \Big\}$$

$$+ \tfrac{\pi}{2}\,\theta(-\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{>}_{p_2} \; \oint_{\tilde{\eta}_1} d^3\vec{q}_1 \; \oint_{\tilde{\eta}_2} d^3\vec{q}_2$$

$$\Big\{ \Xi^{<}_{q_1} \; \Xi^{<}_{q_2} \; \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{P}) \; \theta(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}-\varepsilon)$$

$$\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2})$$

$$|\langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \tilde{T}^{(m)}_{\vec{P}}(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}+i0) \,|\, \tfrac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2}\, \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 \rangle|$$

$$\delta(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}) \Big\} \Big\} .$$

Zusammenfassen der Summanden zwei und vier in Gleichung (7.3.17) führt auf

$$\Sigma_{phys}(p_1;\varepsilon) = \Sigma_{HFL}(p_1;\varepsilon) + \Sigma_{CO}(p_1;\varepsilon) + \Sigma_{R}(p_1;\varepsilon) \qquad 7.3.18$$

mit

$$\Sigma_{HFL}(p_1;\varepsilon) := \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \; \Xi^{<}_{p_2} \; \langle \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \,|\, \Sigma^{(\tilde{T}^{(m)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+i0) \,|\, \tfrac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\, \eta_1\eta_2 \rangle \,, \qquad 7.3.19$$

$$\Sigma_{CO}(p_1;\varepsilon) := \frac{1}{2}\,\theta(-\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \;\; \Xi^{<}_{p_2} \qquad 7.3.20$$

$$\Big\{ \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\tilde{\eta}_1} d^3\vec{q}_1 \;\; \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\tilde{\eta}_2} d^3\vec{q}_2 \;\; \Xi^{<}_{q_1}\, \Xi^{<}_{q_2}\; \delta(\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{P}\,)$$

$$\theta(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}-\varepsilon)\;\; \theta(-\hat{\varepsilon}_{q_1})\,\theta(-\hat{\varepsilon}_{q_2})$$

$$\frac{\left|\left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\,\eta_1\eta_2 \,\middle|\, \tilde{T}^{(11)}_{\vec{P}}(\hat{\varepsilon}_{q_1}+\hat{\varepsilon}_{q_2}+i0)\,\middle|\, \frac{\vec{q}_1-\vec{q}_2}{2}\,\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2\right\rangle\right|^2}{\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}-\hat{\varepsilon}_{q_1}-\hat{\varepsilon}_{q_2}-i0}\Big\},$$

$$\Sigma_{R}(p_1;\varepsilon) := -\frac{1}{\pi}\,\theta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \;\; \Xi^{<}_{p_2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\varepsilon' \qquad 7.3.21$$

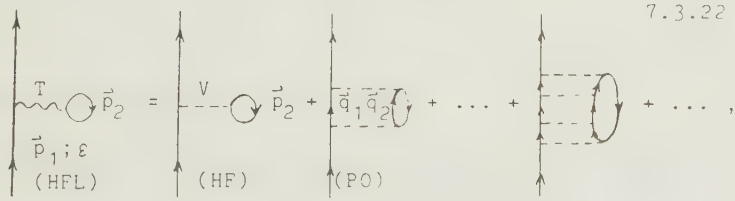
$$\Big\{ \theta(-\varepsilon')\left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\,\eta_1\eta_2 \,\middle|\, \Pi^{(\tilde{T}^{(11)})}_{\vec{P}}(\varepsilon'+\varepsilon+i0)\,\middle|\, \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\,\eta_1\eta_2\right\rangle \frac{\rho}{\varepsilon'-\hat{\varepsilon}_{p_2}} \Big\}$$

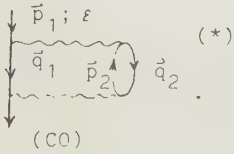
$$+\, i\,\delta(\varepsilon) \sum_{\eta_2} \int d^3\vec{p}_2 \Big\{ \Xi^{<}_{p_2}\;\; \theta(-\hat{\varepsilon}_{p_2})\;\; \theta(\hat{\varepsilon}_{p_2}+\varepsilon)$$

$$\left\langle \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\,\eta_1\eta_2 \,\middle|\, \Pi^{(\tilde{T}^{(11)})}_{\vec{P}}(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2}+i0)\,\middle|\, \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\,\eta_1\eta_2\right\rangle \Big\}.$$

Die Gleichungen (7.3.19-20) lassen sich graphisch darstellen ($T \equiv \tilde{T}^{(11)}$):

7.3.22

$\Sigma_{HFL}(p_1;\varepsilon) =$ 

$\Sigma_{CO}(p_1;\varepsilon) =$ 

(*) . 7.3.23

(*) Zur Diskussion des Korrelationsgraphen (CO) verweisen wir auf (JLM76, SM80, SM80+, MA81).

Der Graph (PO) in (7.3.22) wird wegen der folgenden Interpretation als Polarisationsterm bezeichnet. Das zusätzliche Nukleon $\vec{p}_1$ mit $|\vec{p}_1| > p_F$ (oder Loch mit $|\vec{p}_1| < p_F$) und der Energie ε wechselwirkt zuerst mit dem "Targetnukleon" $\vec{p}_2$ mit dem Resultat, daß es den Impuls $\vec{q}_2$ ($|\vec{q}_2| > p_F$) annimmt, während ein Einteilchen- ($\vec{q}_2$) Einloch- ($\vec{p}_2$) Targetzustand angeregt ist. Das "Target" ist "polarisiert".
Falls die Energie im intermediären Streuzustand erhalten bleibt (d.h. falls $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_{q_1} + \hat{\varepsilon}_{q_2} - \hat{\varepsilon}_{p_2}$ gilt), hat der intermediäre Zustand unendlich Lebensdauer. Das einlaufende Nukleon wird nicht mehr in den Impulszustand $\vec{p}_1$ zurückgestreut. Dies liefert einen komplexen Beitrag zum Massenoperator.
Im Fall der Korrelationskorrektur (CO) findet die erste Wechselwirkung zwischen den "Targetnukleonen" $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ statt (Targetkorrelationen).

Die Relationen (7.3.18-20) stimmen mit den Gleichungen (3.3.7-10) in (MA81) überein, falls die $T^{(11)}$-Matrix durch die Brueckner sche T-Matrix $T^{(B)}$ approximiert wird. Zu diesem Zweck greifen wir auf folgende heuristische Überlegung zurück. Die Integralgleichung (2.3.4) der $T^{(11)}$-Matrix lautet mit der Zerlegung (7.3.5) des $\Lambda^{(11)}$-Propagators

$$T^{(11)} = 2V^{(0)} + V^{(0)}\left(\Lambda^{(11)}_{PP} + \Lambda^{(11)}_{HH}\right) T^{(11)} . \qquad 7.3.24$$

Die Integralgleichung der Brueckner schen T-Matrix $T^{(B)}$ entnehmen wir aus (MA81) (Gleichung (3.3.8)):

$$T^{(B)} = V^{(0)} + V^{(0)} \Lambda^{(11)}_{PP} T^{(B)} \qquad 7.3.25$$

$$= \left(\mathbb{1} + T^{(B)} \Lambda^{(11)}_{PP}\right) V^{(0)} \qquad 7.3.25'$$

(der Brueckner-Propagator stimmt mit dem Teilchen-Teilchen Anteil des $\Lambda^{(11)}$-Propagators überein).

Die Anwendung des Operators $\mathbb{1}+T^{(B)}\Lambda_{PP}^{(11)}$ von links auf Gleichung (7.3.24) ergibt

$$T^{(11)} = 2\,T^{(B)} + T^{(B)}\,\Lambda_{HH}^{(11)}\,T^{(11)} . \qquad 7.3.26$$

Via (7.3.26) kann die $T^{(11)}$-Streumatrix durch die Brueckner-Matrix $T^{(B)}$ ausgedrückt werden (Iteration). Im Impulsraum schließt sich für (7.3.26)

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \eta_1 \eta_2 | \; T^{(11)}(\varepsilon) - 2\,T^{(B)}(\varepsilon) \; | \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' \eta_1' \eta_2' \rangle \qquad 7.3.27$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\vec{q}_1} d^3\vec{q}_1 \int_{\vec{q}_2} d^3\vec{q}_2 \left\{ \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \eta_1 \eta_2 | \; T^{(B)}(\varepsilon) \; | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \rangle \right.$$

$$\left. \frac{(-)\; \Xi^{<}_{\vec{q}_1} \Xi^{<}_{\vec{q}_2} \; \theta(-\hat{\varepsilon}_{\vec{q}_1})\, \theta(-\hat{\varepsilon}_{\vec{q}_2})}{\varepsilon - \hat{\varepsilon}_{\vec{q}_1} - \hat{\varepsilon}_{\vec{q}_2} - 2io} \; \langle \vec{q}_1 \vec{q}_2 \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 | \; T^{(11)}(\varepsilon) \; | \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' \eta_1' \eta_2' \rangle \right\}$$

an.

Einsetzen von (7.3.27) in (3.1.27) liefert ebenfalls Beziehungen, die mit den Gleichungen (3.3.7-10) aus (MA81) übereinstimmen, falls im zweiten Term von (7.3.27) die T-Matrix durch $T^{(B)^+}$ (unter der Annahme, daß $T^{(B)}(\varepsilon)$ $(=T^{(B)}(\varepsilon+io))$ eine reguläre Funktion ist) ersetzt wird.

In der vorliegenden Arbeit wird die $T^{(11)}$-Matrix durch einmalige Iteration der Integralgleichung (6.1) berechnet (s. Gleichungen (6.2.1) und (7.2.34)), so daß die Beziehung (7.3.26) ihre Gültigkeit verliert. In diesem Fall wenden wir den Operator von (7.3.25') von links auf die Integralgleichung der $T^{(11)}$-Matrix von (6.1) an. Mittel der Gleichung der $T^{(00)}$-Amplitude (2.3.4) und der Relation (7.3.25') findet man

$$T^{(00)} = 2\,T^{(B)} - T^{(B)}\left(\Lambda_{PP}^{(11)} - \Lambda^{(00)}\right) T^{(00)} . \qquad 7.3.28$$

Mithin kann die $T^{(00)}$-Matrix, die zur Iteration der $T^{(11)}$-Matrix ge-

braucht wird, über die Brueckner-Matrix $T^{(B)}$ ausgedrückt werden.

8. Numerische Auswertung.

Im ersten Schritt bei der numerischen Berechnung der selbstkonsistent zu lösenden Gleichungen der $\Lambda^{(ij)}$-Approximationen von Kapitel 7 ist mit der Integralgleichung der $T^{(ij)}$-Matrizen zu beginnen. Hierzu haben wir in Kapitel 4 den Wellenoperator $\Omega^{(ij)}$ eingeführt und das Problem auf die Lösung einer linearen Integralgleichung vom Fredholmtyp für die Funktion $\Psi^{JST}_{LL'}(r,p;E) \equiv (rp)\,\Omega^{JST}_{LL'}(r,p;E)$ übergeführt. Im Fall eines Soft-Core-Potentials ist damit Gleichung (4.5.9), im Fall einer Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung mit Hard-Core die modifizierte Gleichung von (4.7.3) zu lösen. Da eine analytisch geschlossene Lösung der auftretenden Integralgleichung bei den von uns verwendeten Potentialen (RSC, PAR,HJ) nicht möglich ist, müssen numerische Methoden herangezogen werden.

Eine Möglichkeit der approximativen Lösung von Integralgleichungen besteht darin, diese in ein lineares Gleichungssystem überzuführen, das durch Matrixinversion gelöst werden kann. Dazu ersetzt man das Integral über das Produkt aus Integralkern K(r,r') und gesuchter Funktion $\Psi(r')$ durch eine endliche gewichtete Summe:

$$\int K(r,r')\,\Psi(r')\,dr' \approx \sum_{j=1}^{N} G_j\, K(r_i, r_j)\,\Psi(r_j)\,. \qquad 8.1$$

Die Gewichte G_j bzw. dazu korrespondierende Stützstellen r_j sind durch Chebyshev- oder Gauß'sche Integrationsmethoden festgelegt. Wir werden in der Arbeit die Quadraturmethode nach Gauß (keine äquidistante Intervallunterteilung) verwenden und dabei die Zahl der Stützstellen N auf N=40 festlegen (KF61,KF63,KT69,WI75).

8.1 Lösung der Integralgleichung für $T^{(ij)}$ via $\Omega^{(ij)}$.

Zunächst schreiben wir die zu lösende lineare Fredholm-Integralgleichung für die Ψ-Funktion (s. (4.5.9) und (4.7.3)) in die für beide Gleichungen gültige Form

$$\psi_{LL'}(r) = \phi_{LL'}(r) + \sum_{L''} \int_{x_a}^{x_b} dr' \, K_{LL''}(r,r') \, \psi_{L''L'}(r') \quad . \qquad 8.1.1$$

Dabei steht $\phi_{LL'}(r)$ für $\delta_{LL'} \varphi_L(pr)$ bzw. $\delta_{LL'} \hat{\varphi}_L(pr)$ und $K_{LL''}(r,r')$ für die Integralkerne $\Lambda_L(r,r',E) V^{\eta ST}_{LL''}(r')$ und $\hat{\Lambda}_L(r,r',E) V^{\eta ST}_{LL''}(r')$. Da die Nukleon-Nukleon-Potentiale im langreichweitigen Teil exponentiell abfallen (Yukawa-Verlauf), haben wir in (8.1.1) als obere Grenze $x_b \lesssim 6$ F (für p>.6 F^{-1}) bzw. $x_b \lesssim 13$ F (für p<.6 F^{-1}) gesetzt.

x_a hat die Werte 0 (Soft-Core-Potential) oder c (Hard-Core-Radius). Unter Benutzung der N-Punkt Quadraturformel nach Gauß geht (8.1.1) über in(*)

$$\psi_{LL'}(i) = \phi_{LL'}(i) + \sum_{L''} \sum_{j=1}^{N} G_j \, K_{LL''}(i,j) \, \psi_{L''L'}(j) \quad . \qquad 8.1.2$$

Im Fall der über die Tensorkraft gekoppelten Gleichungen (8.1.1) finden wir aus (8.1.2) die simultan zu lösenden Systeme

$$\psi_{0L'}(i) = \phi_{0L'}(i) + \sum_{j=1}^{N} G_j \, K_{00}(i,j) \, \psi_{0L'}(j) + \sum_{j=1}^{N} G_j \, K_{02}(i,j) \, \psi_{2L'}(j) \quad , \qquad 8.1.3$$

$$\psi_{2L'}(i) = \phi_{2L'}(i) + \sum_{j=1}^{N} G_j \, K_{20}(i,j) \, \psi_{0L'}(j) + \sum_{j=1}^{N} G_j \, K_{22}(i,j) \, \psi_{2L'}(j) \quad , \qquad 8.1.4$$

(*) $r_i \equiv i$, $K_{LL''}(r_i,r_j) = K_{LL''}(i,j)$ etc.
Zur Berechnung der Gewichte G_j und Stützstellen r_j sei auf (KR65) verwiesen.

während im ungekoppelten Fall

$$\bar{\Psi}_{LL}(i) = \bar{\Phi}_{LL}(i) + \sum_{j=1}^{N} \bar{K}_L(i,j)\, \Psi_{LL}(j) \qquad 8.1.5$$

zu lösen ist. Dabei haben wir von dem in den Indizes i,j symmetrischen Integralkern

$$\bar{K}_L(i,j) := V_L^{\alpha}(i)\, G_i\, K_{LL}(i,j)\, G_j \qquad 8.1.6$$

und

$$\bar{\Phi}_{LL}(i) := V_L^{\alpha}(i)\, G_i\, \Phi_{LL}(i)\,, \qquad 8.1.7$$

$$\bar{\Psi}_{LL}(i) := V_L^{\alpha}(i)\, G_i\, \Psi_{LL}^{\alpha}(i) \qquad 8.1.8$$

Gebrauch gemacht.

Aus den Gleichungen (8.1.3-4) und (8.1.5) lesen wir unmittelbar die entsprechenden linearen Gleichungssysteme

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\left(\delta_{ij} - G_j K_{00}(i,j) \right) \Psi_{0L'}(j) - G_j K_{02}(i,j)\, \Psi_{2L'}(j) \right) = \Phi_{0L'}(i)\,, \qquad 8.1.9$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(-G_j K_{20}(i,j)\, \Psi_{0L'}(j) + \left(\delta_{ij} - G_j K_{22}(i,j) \right) \Psi_{2L'}(j) \right) = \Phi_{2L'}(i) \qquad 8.1.10$$

bzw.

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\delta_{ij} V_L^{\alpha}(i)\, G_i - \bar{K}_L(i,j) \right) \Psi_{LL}(j) = \bar{\Phi}_{LL}(i)\,, \qquad 8.1.11$$

$$i = 1, 2, \ldots, N \qquad 8.1.12$$

ab. Anhand der Gleichungen (8.1.9-10) sieht man, daß sich im gekoppelten Fall die Zahl der simultan zu lösenden linearen Gleichungen um den Faktor 2 erhöht.

Mithin ist die Lösung der linearen Fredholm-Integralgleichung für die Ψ-Wellenfunktion auf eine Matrixinversion reduziert worden, die sich mit bekannten Methoden leicht ausführen läßt.

Bevor wir in nächsten Abschnitt die Lösung des eigentlichen Selbstkonsistenzproblems betrachten, gehen wir noch kurz auf den Fall positiver Energien, für die der $\Lambda^{(00)}$-Propagator in Real- und Imaginärteil ($\Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';E)$ und $\Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';E)$) aufspaltet, ein. Zweckmäßigerweise schreiben wir dazu Gleichung (8.1.1) in der Form

$$\Sigma_{LL'}^{(\psi)}(r) + i\,\Pi_{LL'}^{(\psi)}(r) = \Sigma_{LL'}^{(\phi)}(r) + i\,\Pi_{LL'}^{(\phi)}(r) \qquad 8.1.13$$

$$+ \sum_{L''} \int_{\mathcal{L}_0}^{\infty} dr' \left(\Sigma_{LL''}^{(K)}(r,r') + i\,\Pi_{LL''}^{(K)}(r,r') \right) \left(\Sigma_{L''L'}^{(\psi)}(r') + i\,\Pi_{L''L'}^{(\psi)}(r') \right)$$

weswegen sich bereits im Fall der ungekoppelten S-, P- und D-Kanäle die Zahl der linearen Gleichungen verdoppelt (Vervierfachung im $^3S_1$+$^3D_1$-Kanal).

Im folgenden ersetzen wir wieder die Integrationen in (8.1.13) durch entsprechend gewichtete Summationen und finden nach Ausmultiplikation (Trennung von Real- und Imaginärteile der Gleichung

$$\Sigma_{LL'}^{(\psi)}(i) = \Sigma_{LL'}^{(\phi)}(i) + \sum_{L''} \sum_{j=1}^{N} \left(\Sigma_{LL''}^{(K)}(i,j)\, \Sigma_{L''L'}^{(\psi)}(j) - \Pi_{LL''}^{(K)}(i,j)\, \Pi_{L''L'}^{(\psi)}(j) \right) , \qquad 8.1.14$$

$$\Pi_{LL'}^{(\psi)}(i) = \Pi_{LL'}^{(\phi)}(i) + \sum_{L''} \sum_{j=1}^{N} \left(\Pi_{LL''}^{(K)}(i,j)\, \Sigma_{L''L'}^{(\psi)}(j) + \Sigma_{LL''}^{(K)}(i,j)\, \Pi_{L''L'}^{(\psi)}(j) \right). \qquad 8.1.15$$

Daraus lesen wir unmittelbar das zu lösende lineare Gleichungssystem bzw. die zu invertierende Matrix ab. Der Kürze wegen geben wir nur die Matrixformulierung an und verzichten auf die Angabe der Gleichungen im gekoppelten $^3S_1+^3D_1$-Kanal. Die Matrixgleichung lautet

8.1.16

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \delta_{ij} - \Sigma_u^{(k)}(i,j) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Pi_u^{(k)}(i,j) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & -\Pi_u^{(k)}(i,j) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \delta_{ij} - \Sigma_u^{(k)}(i,j) & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Sigma_{LL}^{(\psi)}(j) \\ \vdots \\ \Pi_{LL}^{(\psi)}(j) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Sigma_{LL}^{(\phi)}(i) \\ \vdots \\ \Pi_{LL}^{(\phi)}(i) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$i=1,2,\ldots,N$.

8.2 Berechnung der $T^{(00)}$-Matrix.

Mit der Kenntnis der Funktion $\psi_{LL'}^{JST}(p,p';E)$ nach Lösen der Integralgleichungen (4.5.9) bzw (4.7.3) kann nun der Entwicklungskoeffizient der T-Matrix $T_{LL'}^{JST}(p,p';E)$ aus (4.5.6) über die Beziehung (4.5.7) im Fall eines SC-Potentials, bzw. mittels (4.7.13) im Fall eines HC-Potentials, berechnet werden.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir noch einige Bemerkungen zur Antisymmetrisierung der T-Matrix nachtragen. Wie bereits erwähnt,

ist die antisymmetrische Streumatrix durch

$$ {}^{(a)}T := T - T^{ex} \qquad 8.2.1 $$

definiert. Explizit schließt sich an (8.2.1) der Ausdruck

$$ \langle \vec{p} \,|\, {}^{(a)}T \,|\, \vec{p}\,' \rangle = \langle \vec{p} \,|\, T \,|\, \vec{p}\,' \rangle - \langle \vec{p} \,|\, T \,|\, -\vec{p}\,' \rangle \qquad 8.2.2 $$

mit Direkt- und Austauschmatrixelement an. Zur Berechnung des Austauschmatrixelements erinnern wir uns an die Relation (4.5.6), derzufolge die Vektorkugelflächenfunktion $\mathcal{Y}^{L'S}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}\,'})$ mithin durch

$$ \mathcal{Y}^{L'S}_{\eta M}(\Omega_{-\vec{p}\,'}) = \sum_{M_{L'}} \sum_{M_S} \left(\begin{matrix} L' & S \\ M_{L'} & M_S \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \eta \\ M \end{matrix} \right) Y_{L'M_{L'}}(\Omega_{-\vec{p}\,'}) \, \chi_{SM_S} \qquad 8.2.3 $$

(vgl. (5.1.3)) zu ersetzen ist. Die Kugelflächenfunktion $Y_{L'M_{L'}}$ in (8.2.3) zeigt bekanntlich bei Raumspiegelung das Verhalten

$$ Y_{L'M_{L'}}(\Omega_{-\vec{p}\,'}) \equiv Y_{L'M_{L'}}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-)^{L'} Y_{L'M_{L'}}(\Omega_{\vec{p}\,'}), \qquad 8.2.4 $$

so daß unter Beachtung der Symmetrierelation der im Austauschmatrixelement stehenden Clebsch-Gordan Koeffizienten

$$ \left(\begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_{j_i} & T_{i_i} \\ T_{3_j} & T_{3_i} \end{matrix} \right) = (-)^{1-T} \left(\begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_{i_i} & T_{j_i} \\ T_{3_i} & T_{3_j} \end{matrix} \right) \qquad 8.2.4' $$

für den Isospin (entsprechend für den Spin S) der Faktor $(-)^{L+S+T}$ auftritt. Zusammengefaßt geht damit (8.2.1-2) über in

$$ \langle \vec{p} \,|\, {}^{(a)}T \,|\, \vec{p}\,' \rangle = \sum_{\eta M} \sum_{LL'} \sum_{ST} \sum_{T_3} \mathcal{Y}^{LS}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}}) \left| \begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix} \right\rangle T^{\eta S T}_{LL'}(p, p'; E) \, (1-(-)^{L'+S+T}) \left\langle \begin{matrix} T \\ T_3 \end{matrix} \right| \mathcal{Y}^{L'S\,*}_{\eta M}(\Omega_{\vec{p}\,'}) . \qquad 8.2.5 $$

Das Matrixelement $\langle \vec{p} \,|\, {}^{(a)}T \,|\, \vec{p}\,' \rangle$ ist mithin nur für ungerade Werte von L'+S+T von null verschieden und unterscheidet sich vom nicht-

antisymmetrisierten Wert lediglich um den Faktor 2. Der häufig benutzte Faktor $\xi_{LST} := 2^{-1}(1-(-)^{L+S+T})$ trägt dem Umstand Rechnung, daß nur solche Kanäle des Zweinukleonen-Streuproblems beitragen, deren Bahn-, Spin- und Isospinquantenzahlen die obige Beziehung erfüllen.

Nach diesen Anmerkungen geben wir nun die Ausdrücke zur Berechnung der Koeffizienten $T^{\alpha}_{LL'}(p,p';E)$, die wir aus den Gleichungen (4.5.7) bzw. (4.7.13) ableiten, an. Den Fall negativer Energien, für den $\Lambda^{(00)}(r,r';E)$ rein reell ist, haben wir in Kapitel 4 bereits behandelt. Im Fall des HJ-Potentials erhält man (mit der Zerlegung $T = \Sigma^{(T)} + i\,\pi^{(T)}$, $\beta := E - \vec{P}^2/(4m) + 2\mu$, s. (4.2.7))

8.2.6

$$
{}^{(a)}_{HJ}\Sigma^{\alpha\,(T)}_{LL'}(p,p';\beta) = \frac{4}{\pi}\,\delta_{LL'}\left(-\frac{\varphi_L(pc)}{p}\,\frac{\varphi_L(p'c)}{p'}\,\frac{\Sigma^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta)}{(\Sigma^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta))^2+(\pi^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta))^2}\right.
$$

$$
\left. + \int_0^c d\tau'\,\frac{\Sigma^{(\hat{\varphi})}_L(c,\tau';p;\beta)}{p}\,\frac{\varphi_L(p'\tau')}{p'}\,(p'^2-\beta)\right)
$$

$$
+\frac{4}{\pi}\sum_{L''}{}'\int_c^{\alpha} d\tau'\, i^{L'-L}\left(V^{\alpha}_{LL''}(\tau')\,\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}\right.
$$

$$
\left.\frac{1}{pp'}\left(\Sigma^{(\hat{\varphi})}_L(c,\tau';p;\beta)\,\Sigma^{(\psi)\alpha}_{L''L'}(\tau';p';\beta)-\pi^{(\hat{\varphi})}_L(c,\tau';p;\beta)\,\pi^{(\psi)\alpha}_{L''L'}(\tau';p';\beta)\right)\right)
$$

und für den Imaginärteil

8.2.7

$$
{}^{(a)}_{HJ}\Pi^{\alpha\,(T)}_{LL'}(p,p';\beta) = \frac{4}{\pi}\,\delta_{LL'}\left(\frac{\varphi_L(pc)}{p}\,\frac{\varphi_L(p'c)}{p'}\,\frac{\pi^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta)}{(\Sigma^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta))^2+(\pi^{(\Lambda)}_L(c,c;\beta))^2}\right)
$$

$$
+\frac{4}{\pi}\sum_{L''}{}'\int_c^{\alpha} d\tau'\, i^{L'-L}\left(V^{\alpha}_{LL''}(\tau')\,\xi_{LST}\,\xi_{L''ST}\right.
$$

$$\frac{1}{pp'}\left(\Sigma_L^{(\hat{\varphi})}(c, r; p; \beta)\, \Pi^{\alpha\,(\psi)}_{L''L'}(r', p'; \beta) + \Pi_L^{(\hat{\varphi})}(c, r'; p;)\, \Sigma^{\alpha\,(\psi)}_{L''L'}(r'; p'; \beta) \right) \Bigg) .$$

Im Fall des Paris-Potentials (s. gesonderte Behandlung in Abschnitt (8.3) ergibt sich, solange der $\Lambda^{(00)}$-Propagator rein reell ist, der Ausdruck(*)

8.2.8

$$\begin{aligned}
{}^{(a)}_{PAR}T^{\alpha}_{LL'}(p, p'; \beta) = \frac{4}{\pi}\, \frac{1}{pp'}\, i^{l'-l} \Bigg\{ & \sum_{L''} \int_0^{\infty} dr'\, \varphi_L(pr')\, V^{\alpha}_{LL''}(r')\, \xi_{LST}\, \xi_{L''ST}\, \psi^{\alpha}_{L''L'}(r'; p'; \beta) \\
& \sum_{L''} \delta_{LL''} \sum_S \varphi_S \int_0^{\infty} dr'\, \varphi_L(pr')\, \frac{2L(L+1)}{r'^2}\, V_S^{b}(r') \\
& \xi_{LST}\, \psi^{\alpha}_{LL'}(r'; p'; \beta) \\
& - \sum_{L''} \delta_{LL''} \sum_S \varphi_S \int_0^{\infty} dr' \left(\frac{d^2}{dr'^2} \varphi_L(pr') \right) V_S^{b}(r') + \tilde{\varphi}_{L,S}(p, \\
& \xi_{LST}\, \psi^{\alpha}_{LL'}(r'; p'; \beta) \Bigg\},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{L,S}(p, r') := & \left(\frac{d^2}{dr'^2} \varphi_L(pr') \right) V_S^{b}(r') + 2 \left(\frac{d}{dr'} \varphi_L(pr') \right) \left(\frac{d}{dr'} V_S^{b}(r') \right) \\
& + \varphi_L(pr') \left(\frac{d^2}{dr'^2} V_S^{b}(r') \right)
\end{aligned} \qquad 8.2.9$$

definiert wurde.

(*) Größen, die hier nicht weiter erklärt sind, wurden bereits in Kapitel 5 eingeführt.

Für komplexwertige $T^{\alpha}_{LL'}(p,p';\beta)$-Elemente schließt sich an (8.2.9)

8.2.10

$$
{}^{(a)}_{PAR}\Sigma^{\alpha\,(T)}_{LL}(p,p',\beta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{pp'}\Bigg\{\int_0^{\infty} dr'\,\varphi_L(pr')\left(V^{\alpha}_{LL}(r') + \frac{2L(L+1)}{r'^2}\sum_s \varphi_s\, V^{b}_{s}(r')\right)
$$

$$
\xi_{LST}\,\Sigma^{\alpha\,(\psi)}_{LL}(r';p';\beta)
$$

$$
-\int_0^{\infty} dr'\sum_s \varphi_s\left(\left(\frac{d^2}{dr'^2}\varphi_L(pr')\right)V^{b}_{s}(r') + \tilde{\varphi}_{L,s}(p,r')\right)
$$

$$
\xi_{LST}\,\Sigma^{\alpha\,(\psi)}_{LL}(r';p';\beta)\Bigg\};
$$

8.2.11

$$
{}^{(a)}_{PAR}\Pi^{\alpha\,(T)}_{LL}(p,p',\beta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{pp'}\Bigg\{\int_0^{\infty} dr'\,\varphi_L(pr')\left(V^{\alpha}_{LL}(r') + \frac{2L(L+1)}{r'^2}\sum_s \varphi_s\, V^{b}_{s}(r')\right)
$$

$$
\xi_{LST}\,\Pi^{\alpha\,(\psi)}_{LL}(r';p';\beta)
$$

$$
-\int_0^{\infty} dr'\sum_s \varphi_s\left(\left(\frac{d^2}{dr'^2}\varphi_L(pr')\right)V^{b}_{s}(r') + \tilde{\varphi}_{L,s}(pr')\right)
$$

an.

$$
\xi_{LST}\,\Pi^{\alpha\,(\psi)}_{LL}(r';p';\beta)\Bigg\}
$$

8.3 Programmierung im Fall des Paris-Nukleon-Nukleon-Potentials.

Wie wir im Kapitel 5.4 sahen, treten beim Paris-Potential Ortsableitungen zweiter Ordnung im Zentralanteil der Wechselwirkung auf. Dies macht eine Umformulierung der Integralgleichung für die ψ-Funktion nötig.

Durch Einsetzen von $\langle\vec{r}\,|\,V(\vec{r};p^2)\,|\,\vec{r}\,'\rangle$ aus (5.4.32-34) in die Integralgleichung (4.5.9) findet man nach einiger Rechnung

$$\psi^{\alpha}_{LL'}(r;\rho;\beta) = \delta_{LL'}\,\varphi_L(r\rho) + \chi_L(r;\beta) \qquad 8.3.1$$

$$+ \int_0^{\infty} dr' \left(\Lambda_L^{(00)}(r,r';\ )\left(-\frac{d^2 V_S^b(r')}{dr'^2} + \frac{2L(L+1)}{r'^2}\, V_S^b(r')\right)\right.$$

$$\xi_{LST}\, \psi^{\alpha}_{LL}(r';\rho;\beta)$$

$$+ \sum_{L''} V^{\alpha}_{LL''}(r')\, \xi_{LST}\, \xi_{L''ST}\, \psi^{\alpha}_{L''L'}(r';\rho';\beta$$

mit

$$\chi_L(r;\beta) := -\int_0^{\infty} dr' \left(2\,\frac{d^2}{dr'^2}\Lambda_L(r,r';\beta)\; V_S^b(r') \right. \qquad 8.3.2$$

$$\left. + 2\left(\frac{d}{dr'}\Lambda_L(r,r';\beta)\right)\left(\frac{d}{dr'}V_S^b(r')\right)\right)\psi^{\alpha}_{LL}(r')\,.$$

Die darin auftretenden Ortsableitungen finden wir im Anhang A.3. Wie man dort sieht, spalten die zweiten Ortsableitungen $\frac{d^2}{dr'^2}\Lambda_L(r,r';\beta)$ je eine δ-Funktion ab, so daß die in (8.3.2) definierte Funktion jeweils Terme mit ..+(...)$V_S^b(r)\,\psi^{\alpha}_{LL}(r)$ ergibt. Diesen Sachverhalt können wir quantitativ durch Definition der Hilfsfunktion $\gamma_L(r)$ mittels ($w^2 = -\beta m = -(E-P^2/(4m)+2\mu)$, vgl. (4.2.7))

$$\gamma_L(r) := 2V_S^b(r) \quad (L=0,1,2) \qquad 8.3.3$$

und

$$\bar{\chi}_L(r;\beta) := \chi_L(r;\beta)\;\psi^{\alpha}_{LL}(r) \qquad 8.3.4$$

formulieren. Mit diesen Definitionen läßt sich die Integralgleichung (8.3.1) überführen in

8.3.5

$$(1+\delta_L(r;\beta))\,\psi_{LL}^{\alpha}(r;p;\beta) = \varphi_L(pr) + \bar{\chi}_L(r;\beta)$$

$$+\int_0^{\infty} dr'\Big(\Lambda_L(r,r';\beta)\Big(-\frac{d^2}{dr'^2}V_s^{b}(r') + \frac{2L(L+1)}{r'^2}V_s^{b}(r')$$

$$+ V_{LL}^{\alpha}(r')\Big)\Big)\,\xi_{LST}\,\psi_{LL}^{\alpha}(r';p;\beta),$$

deren Struktur uns bereits von (8.1.1) bekannt ist. Folglich kann (8.3.1) bzw. (8.3.5) mit den gleichen numerischen Methoden wie oben gelöst werden. Der Kürze wegen verzichten wir wieder auf die Formulierung der Streugleichung für den gekoppelten $^3S_1$+$^3D_1$-Kanal und betrachten im Anschluß den ungekoppelten Fall für komplexwertige Propagatoren.

Dazu gehen wir zu (8.3.1) zurück und setzen

$$\psi_{LL}^{\alpha} = \Sigma_L^{\alpha(\psi)} + i\,\Pi_L^{\alpha(\psi)}, \quad \Lambda_L = \Sigma_L^{(\Lambda)} + i\,\Pi_L^{(\Lambda)}, \quad \chi_L = \Sigma_L^{(\chi)} + i\,\Pi_L^{(\chi)} \qquad 8.3.6$$

ein. Damit finden wir

8.3.7

$$\Sigma_L^{(\chi)}(r,\beta) = -2\int_0^{\infty} dr'\Big\{\Big[\Big(\frac{d^2}{dr'^2}\Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)V_s^{b}(r') + \Big(\frac{d}{dr'}\Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)\Big(\frac{d}{dr'}V_s^{b}(r')\Big)\Big]$$

$$\Sigma_L^{\alpha(\psi)}(r';p';\beta)$$

$$-\Big[\Big(\frac{d^2}{dr'^2}\Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)V_s^{b}(r') + \Big(\frac{d}{dr'}\Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)\Big(\frac{d}{dr'}V_s^{b}(r')\Big)\Big]$$

$$\Pi_L^{\alpha(\psi)}(r',p',\beta)\Big\}\,\xi_{LST},$$

$$\Pi_L^{(\chi)}(r;\beta) = -2\int_0^\infty dr' \Big\{ \Big[\Big(\frac{d^2}{dr'^2}\Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big) V_s^b(r') \tag{8.3.8}$$

$$+ \Big(\frac{d}{dr'}\Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)\Big(\frac{d}{dr'}V_s^b(r')\Big)\Big] \Sigma_L^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta)$$

$$+ \Big[\Big(\frac{d^2}{dr'^2}\Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big) V_s^b(r')$$

$$+ \Big(\frac{d}{dr'}\Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\Big)\Big(\frac{d}{dr'}V_s^b(r')\Big)\Big] \Pi_L^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta) \Big\} \xi_{LST}$$

und für die Ψ-Wellenfunktion das folgende gekoppelte (via $\Sigma^{(\Psi)}$ und $\Pi^{(\Psi)}$) System von Integralgleichungen

$$\Sigma_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r;\rho';\beta) = \varphi_L(\rho' r) + \Sigma_{LL}^{(\chi)}(r;\beta) \tag{8.3.9}$$

$$+ \int_0^\infty dr' \Big\{ \Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\ \Xi_L^{\Lambda ST}(r')\ \Sigma_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta)$$

$$- \Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\ \Xi_L^{\Lambda ST}(r')\ \Pi_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta) \Big\} \xi_{LST} ,$$

$$\Pi_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r,\rho';\beta) = \Pi_{LL}^{(\chi)}(r,\beta) + \int_0^\infty dr' \Big\{ \Sigma_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\ \Xi_L^{\Lambda ST}(r')\ \Pi_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta) \tag{8.3.10}$$

$$+ \Pi_L^{(\Lambda)}(r,r';\beta)\ \Xi_L^{\Lambda ST}(r')\ \Sigma_{LL}^{\alpha(\Psi)}(r';\rho';\beta)\Big\} \xi_L$$

$$\Xi_L^{\eta ST}(r') := -\frac{d^2}{dr'^2} V_S^{\ell}(r') + \frac{2L(L+1)}{r'^2} + V_{LL}^{\eta ST}(r') \,. \qquad 8.3.11$$

Schließlich machen wir von der Definition (8.3.4) in der Form

$$\Sigma_{LL}^{(\bar{\chi})}(r;\beta) = \Sigma_{LL}^{(\bar{\chi})}(r;\beta) - \gamma_\tau(r;\beta)\, \Sigma_{LL}^{(\psi)}(r;\beta) \,, \qquad 8.3.12$$

$$\Pi_{LL}^{(\chi)}(r;\beta) = \Pi_{LL}^{(\bar{\chi})}(r;\beta) \qquad 8.3.13$$

Gebrauch, so daß die Gleichungen (8.3.9) und (8.3.10) übergehen in

$$\begin{aligned}(1+\gamma_\tau(r;\beta))\, \Sigma_{LL}^{\alpha(\psi)}(r) &= \varphi_L(\rho' r) + \Sigma_{LL}^{(\bar{\chi})}(r) \\ &+ \int_0^\infty dr' \Big\{ \Sigma_L^{(\Lambda)}(r')\, \Xi_L^{\eta ST}(r')\, \Sigma_{LL}^{\alpha(\psi)}(r') \\ &\quad - \Pi_L^{(\Lambda)}(r')\, \Xi_L^{\eta ST}(r')\, \Pi_{LL}^{\alpha(\psi)}(r') \Big\}\, \xi_{LST} \,,\end{aligned} \qquad 8.3.14$$

$$\begin{aligned}(1+\gamma_\tau(r;\beta))\, \Pi_{LL}^{\alpha(\psi)}(r) &= \Pi_{LL}^{(\bar{\chi})}(r) \\ &+ \int_0^\infty dr' \Big\{ \Sigma_L^{(\Lambda)}(r')\, \Xi_L^{\eta ST}(r')\, \Pi_{LL}^{\alpha(\psi)}(r') \\ &\quad + \Pi_L^{(\Lambda)}(r')\, \Xi_L^{\eta ST}(r')\, \Sigma_{LL}^{(\psi)}(r') \Big\}\, \xi_{LST} \,.\end{aligned} \qquad 8.3.15$$

Die Ausdrücke (8.3.14) und (8.3.15) lassen sich nun in dieser Form wiederum in ein lineares System überführen.

Um den gekoppelten Kanal angeben zu können, treffen wir die Definitionen

$$\tilde{V}_0 := -\frac{d^2}{dr'^2} V_S^{\ell}(r') + V_{00}^{\eta ST}(r') \,, \qquad 8.3.16$$

$$\tilde{V}_2 := -\frac{d^2}{dr'^2} V_S^b(r') + \frac{12}{r'^2} V_S^b(r') + V_{22}^{HST}(r') \,, \qquad 8.3.17$$

$$\Xi_L^{\Sigma} := \left(\frac{d^2}{dr'^2} \Sigma_L^{(\Lambda)}(r')\right) V_S^b(r') + \left(\frac{d}{dr'} \Sigma_L^{(\Lambda)}(r')\right)\left(\frac{d}{dr'} V_S^b(r')\right) , \qquad 8.3.18$$

$$\Xi_L^{\Pi} := \left(\frac{d^2}{dr'^2} \Pi^{(\Lambda)}(r')\right) V_S^b(r') + \left(\frac{d}{dr'} \Pi^{(\Lambda)}(r')\right)\left(\frac{d}{dr'} V_S^b(r')\right) , \qquad 8.3.19$$

womit die gekoppelten Integralgleichungen

8.3.20

$$\begin{aligned}\Sigma_{0L'}^{(\Psi)} = (1+\gamma_{\Sigma_0})^{-1} \Big\{ \delta_{0L'}\varphi_0 + \int_0^\infty \Big[& (-2\,\Xi_0^{\Sigma} + \Sigma_0^{(\Lambda)}\tilde{V}_0)\,\Sigma_{0L'}^{(\Psi)} \\ & + (2\,\Xi_0^{\Pi} - \Pi_0^{(\Lambda)}\tilde{V}_0)\,\Pi_{0L'}^{(\Psi)} \\ & + \Sigma_0^{(\Lambda)} V_{02}^{\alpha}\,\Sigma_{2L'}^{(\Psi)} - \Pi_0^{(\Lambda)} V_{02}^{\alpha}\,\Pi_{2L'}^{(\Psi)} \Big] \Big\} ,\end{aligned}$$

8.3.21

$$\begin{aligned}\Pi_{0L'}^{(\Psi)} = (1+\gamma_{\Pi_0})^{-1} \Big\{ \int_0^\infty \Big[& (-2\,\Xi_0^{\Pi} + \Pi_0^{(\Lambda)}\tilde{V}_0)\,\Sigma_{0L'}^{(\Psi)} \\ & + (-2\,\Xi_0^{\Sigma} + \Sigma_0^{(\Lambda)}\tilde{V}_0)\,\Pi_{0L'}^{(\Psi)} \\ & + \Pi_0^{(\Lambda)} V_{02}^{\alpha}\,\Sigma_{2L'}^{(\Psi)} + \Sigma_0^{(\Lambda)} V_{02}^{\alpha}\,\Pi_{2L'}^{\alpha} \Big] \Big\} ,\end{aligned}$$

8.3.22

$$\begin{aligned}\Sigma_{2L'}^{(\Psi)} = (1+\gamma_{\Sigma_2})^{-1} \Big\{ \delta_{2L'}\varphi_2 + \int_0^\infty \Big[& \Sigma_2^{(\Lambda)} V_{20}^{\alpha}\,\Sigma_{0L'}^{(\Psi)} - \Pi_2^{(\Lambda)} V_{20}^{\alpha}\,\Pi_{0L'}^{(\Psi)} \\ & + (-2\,\Xi_2^{\Sigma} + \Sigma_2^{(\Lambda)}\tilde{V}_2)\,\Sigma_{2L'}^{(\Psi)} \\ & + (2\,\Xi_2^{\Pi} - \Pi_2^{(\Lambda)}\tilde{V}_2)\,\Pi_{2L'}^{(\Psi)} \Big] \Big\}\end{aligned}$$

und 8.3.23

$$\begin{aligned}\Pi_{2L'}^{(\Psi)} = (1+\gamma_{\Pi_2})^{-1} \Big\{ \int_0^\infty \Big[& \Pi_2^{(\Lambda)} V_{20}^{\alpha}\,\Sigma_{0L'}^{(\Psi)} + \Sigma_2^{(\Lambda)} V_{20}^{\alpha}\,\Pi_{2L'}^{(\Psi)} \\ & + (-2\,\Xi_2^{\Pi} + \Pi_2^{(\Lambda)}\tilde{V}_2)\,\Sigma_{2L'}^{(\Psi)} \\ & + (-2\,\Xi_2^{\Pi} + \Sigma_2^{(\Lambda)}\tilde{V}_2)\,\Pi_{2L'}^{(\Psi)} \Big] \Big\}\end{aligned}$$

folgen.

Im Fall des Paris-Potentials wurde zu Vergleichszwecken die Wellenfunktion $\psi^{\alpha}_{LL'}(r,p;\beta)$ zusätzlich durch Lösen der zur Integralgleichung von (4.5.9) äquivalenten Differentialgleichung von (4.6.7) berechnet. Mit den Potentialmatrixelementen von Abschnitt 5.4 finden wir für (4.6.7) eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (ODGL) der Form

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi^{\alpha}_{LL'}(r;p';\beta) + A(r)\frac{d}{dr}\psi^{\alpha}_{LL'}(r;p',\beta) + \sum_{L''} B_{LL''}(r;\beta)\,\psi^{\alpha}_{L''L'}(r;p';\beta) = \delta_{LL'}\, C(r;p';\beta) \tag{8.3.24}$$

mit

$$A(r) := \left(2\frac{d}{dr}V_s^{b}(r)\right)\left(2V_s^{b}(r)+1\right)^{-1}, \tag{8.3.25}$$

$$B_{LL''}(r;\beta) := \left(\left(m\beta - \frac{L(L+1)}{r^2}\left(2V_s^{b}(r)+1\right) + \frac{d^2}{dr^2}V_s^{b}(r)\right)\delta_{LL''} - V^{\alpha}_{LL''}(r)\right)\left(2V_s^{b}(r)+1\right)^{-1}, \tag{8.3.26}$$

$$C_L(r,p',\beta) := \varphi_L(p'r)\,(\beta-p'^2)\,\left(2V_s^{b}(r)+1\right)^{-1}. \tag{8.3.27}$$

8.4 Selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(00)}$-und $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen.

Bevor im nächsten Kapitel die Diskussion der erzielten Ergebnisse folgt, wollen wir noch auf die numerische Formulierung der aus Kapitel 7 bekannten, selbstkonsistent zu lösenden Gleichungen eingehen.

Das Schema der $\Lambda^{(00)}$-Gleichungen wurde für die Potentiale HJ, RSC, PAR, das der $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen für HJ und RSC gelöst. In allen drei $\Lambda^{(ij)}$-Rechnungen wurde bei der Berechnung des Massenoperators über alle Zustände mit gerader- und ungerader Parität ($L \leq 2$) summiert. Die Wahl dieser Zustände, nämlich

$$\begin{aligned} &{}^1S_0,\ {}^3S_1+{}^3D_1,\ {}^1D_2,\ {}^3D_2,\ {}^3D_3, \\ &{}^1P_1,\ {}^3P_0,\ {}^3P_1,\ {}^3P_2, \end{aligned} \qquad 8.4.1$$

die auch von Fiset und Foster 1972 (FF72) benutzt wurden, tragen den von Sprung 1972 (SP72) vorgeschlagenen Partialwellen Rechnung (*).

Die Ablaufdiagramme der erstellten Computerprogramme zur selbstkonsistenten Lösung der $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen finden wir im Anhang A.5.1.

Im ersten Schritt werden demnach, nach Einlesen der Daten, die Stützstellen für Gauß- (Integralgleichung (8.1.1-2)) und Simpsonintegration ($\Lambda^{(10)}$-Propagator), die Konstanten und alle energie- und impulsunabhängigen

---

(*) In (SP72) wird gezeigt, daß $\sum_{i=0}^{2} {}^3P_i \approx 0$ und ${}^1D_2+{}^1P_1 \approx 0$ in Kernmaterie gilt (vgl. hierzu auch (BS71,CPS75)).

Größen (z.B. $V_{LL'}^{JST}(r)$) berechnet. Bei einer $\Lambda^{(10)}$-Rechnung werden zusätzlich der off-shell Massenoperator $\Sigma(p;\varepsilon)$ (für verschiedene Werte von ε als Funktion von p) und die Dichteverteilung n(p), die zur numerischen Integration des $\Lambda^{(10)}$-Propagators nötig sind, je durch kubische Splines approximiert. Als Startwerte für $\varepsilon(p)$, $\Sigma(p;\varepsilon)$ und n(p) dienen dabei die Resultate einer konvergenten $\Lambda^{(00)}$-Rechnung.

Im Anschluß werden zu vorgegebenem Fermiimpuls p_F die Stützstellen im Impulsintervall $(0,p_F)$ bestimmt (4 bis 5 Stützstellen), die Werte für n(p), $\varepsilon(p)$ und $\mu=\varepsilon(p_F)$ in Arbeitsfelder abgespeichert und damit die eigentliche Selbstkonsistenzrechnung gestartet.

Man beginnt mit der Berechnung der Selbstenergie $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}_p)$ für on- und off-shell Argumente ("$p\neq\hat{\varepsilon}(p)$"), so daß Σ nach erfolgreichem Durchlauf der Impuls- und Energieschleifen in Form einer 5x5-Matrix, die die Gestalt $(\Sigma(p_i;\hat{\varepsilon}(p_j))=\Sigma_{ij})$

$$\left(\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))\right)_{5\times5} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & & \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & & 0 \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & & \\ & & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} \\ & 0 & & & \\ & & \Sigma_{53} & \Sigma_{54} & \Sigma_{55} \end{bmatrix} \qquad 8.4.2$$

hat, zur Berechnung der Grundzustands- und Einteilchengrößen vorliegt.

Wie wir bereits von Kapitel 7 wissen, ist die Selbstenergie $\Sigma(p;\varepsilon)$ über die T-Matrix gemäß Gleichung (7.1.13) gegeben.

Diesem Ausdruck zufolge ist zur Berechnung von Σ eine Integration über $d^3\vec{p}_2 = p_2^2\, dp_2\, d\Omega_{\vec{p}_2}$ auszuführen. Für die Raumwinkelintegration lesen wir aus (7.1.13)

$$\int_{-1}^{+1} dx \left({}^{(a)}T^{(00)}_{|\vec{p}_1+\vec{p}_2|} \left(\frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \frac{|\vec{p}_1-\vec{p}_2|}{2}, \varepsilon + \hat{\varepsilon}_{p_2} \right) \right)^{ZST}_{LL} \qquad 8.4.3$$

ab, wobei $x = (\vec{p}_1 \vec{p}_2)(p_1 p_2)^{-1} = \cos(\Theta_{12})$ ist. Die mithin zur Berechnung des Massenoperators auszuführende, rechenzeitintensive Doppelintegration läßt sich jedoch auf elegante Weise dadurch umgehen, daß man für den Integranden $T(q(x), q(x); \varepsilon)$ in (8.4.3), der quadratisch von $q(x)$ für $x \in (-1,1)$ abhängt, ein Polynom der Form

$$T(q(x), q(x); \varepsilon) = A + B\, q^2(x) + C\, q^4(x) \qquad 8.4.4$$

mit $\vec{q}(x) = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$ 8.4.4'

ansetzt (BG58). Die Integration von (8.4.4) liefert dann für das Raumwinkelintegral von (8.4.3) die einfache Integrationsregel(*)

$$\int_{-1}^{+1} dx\, {}^{(a)}T_{\vec{p}_1+\vec{p}_2}(q(x), q(x); \varepsilon) = \sum_{x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}} {}^{(a)}T_{\vec{p}_1+\vec{p}_2}(q(x), q(x)). \qquad 8.4.5$$

Wie wir sehen, werden damit nur zwei T-Werte, nämlich $T(\frac{1}{\sqrt{3}})$ und $T(\frac{-1}{\sqrt{3}})$, benötigt, wodurch sich die Rechenzeit um den Faktor 10 bis 20 erniedrigt. Vergleichsrechnungen zwischen der "exakten" x-Integration und der Approximation (8.4.5) haben ergeben, daß sich die Bindungsenergie pro Nukleon $E_0(N)/N$ dabei um weniger als 1% ändert.

(*) Der winkelgemittelte Schwerpunktsimpuls wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Für Funktionen $f(\varphi)$, die durch

$$f(\varphi^2) = A + B\varphi^2 + C\varphi^4 \qquad 8.4.6$$

approximiert werden können, halten wir ferner die Integrationsregel

$$\int_0^{p_F} d\varphi\, \varphi^2 f(\varphi^2) = \frac{p_F^3}{6} \sum_{j=\alpha_\pm} f\left((\alpha_j p_F)^2\right) \qquad 8.4.7$$

mit $\alpha_+ := .5814968,$ 8.4.8

$\alpha_- := .92836494$

fest (BG58).

Im nächsten Schritt werden die Dichte n(p) und die Einteilchenenergien inklusive $\mu = \varepsilon(p_F)$ berechnet. Wir erinnern daran, daß zur Berechnung von n(p) die on-shell Energieableitung des Massenoperators zu bilden ist, wozu wir $\Sigma_{p_i}(\varepsilon)$ (p_i=fest, i=1,...,5) wieder durch einen kubischen Spline approximieren und daraus $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \Sigma_{p_i}(\varepsilon)\Big|_{\hat{\varepsilon}(p_i)}$ bestimmen. Im sich anschließenden Konvergenztest werden die neu berechneten Werte für $\varepsilon(p)_{I+1}$ und $n(p)_{I+1}$ mit den Startwerten $\varepsilon(p)_I$ und $n(p)_I$ verglichen. Je nach Differenz wird die Selbstkonsistenzrechnung mit den neu berechneten $\varepsilon(p)_{I+1}$- und $n(p)_{I+1}$-Werten wiederholt bzw. bei hinreichender Konvergenz nach Berechnung der Kernmateriegrößen wie Dichte ρ, mittlerer Teilchenabstand r_0, effektiver Masse m*/m und Energie pro Nukleon $E_0(N)/N$ (s. Kapitel 7) abgebrochen. Die hierzu nötigen Integrationen können entweder unter Benutzung der Regel (8.4.7) oder durch Splineinterpolation und anschließender Integration (endliche Differenzenformel dritter Ordnung nach Gill und Miller) ausgeführt werden. Geeignete Routinen finden sich auch in den NAG-

und IMSL-Programmbibliotheken des Leibnitz-Rechenzentrums und der CERN-Computerbibliothek.
An Ende einer konvergenten $\Lambda^{(00)}$-Rechnung bietet sich schließlich noch die Berechnung des off-shell Massenoperators $\Sigma^{(off)}(p,\varepsilon)$ an wie er zur numerischen Integration im Fall einer $\Lambda^{(10)}$-Selbstkonsistenzrechnung nötig ist ($0 \leq p \leq 11 k_F$, $-100\ F^{-2} \leq \varepsilon \leq -.1\ F^{-2}$).

Zum Test des $\Lambda^{(00)}$-Programms kann die Arbeit von Fiset und Foster (FF72) herangezogen werden. Diese berechneten, mit dem gleichen Satz von Partialwellen wie in der vorliegenden Arbeit (s. (8.4.1)), für die Energie pro Nukleon $E_0/N=-6.4$ MeV bei einem Fermiimpuls $p_F=1.251$. Im Vergleich hierzu berechneten wir $E_0/N=-6.23$ MeV. Der mittlere Teilchenabstand wird von den genannten Autoren mit $r_0=1.31$ angegeben und stimmt damit mit dem von uns berechneten Wert $r_0=1.31$ überein (s. Tabelle 4). Den Verlauf der Einteilchenspektren $\varepsilon(p)$, der Massenoperatoren $\Sigma(p,\varepsilon_p)$ und der Einteilchendichten jeweils als Funktion von p finden wir in den Abbildungen.

Die selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen kann im Prinzip, unter Beachtung der folgenden Änderungen, mit dem gleichen Iterationsschema berechnet werden. Zunächst bemerken wir dazu, daß der $\Lambda^{(10)}$-Propagator, im Unterschied zum "freien" $\Lambda^{(00)}$-Propagator, numerisch integriert werden muß. Hierzu bietet sich die Integrationsmethode von Simpson an, wobei die Wahl der Intervalle bzw. der Schrittweiten hierzu bereits von den Autoren (CD65,BM62, FF72) untersucht wurde. Diese Impulsintegration über die intermediären Zustände, die in der exakten theoretischen Behandlung von $[0,\infty)$ läuft, kann bei $\varkappa=10\ k_F$ (s. (4.3.22-23)) abgebrochen und der Restterm analytisch berechnet werden (s. Integrale in An-

hang A.4). Ein weit größeres Problem stellt in diesem Zusammenhang der off-shell Massenoperator $\Sigma(p_F;\omega=\varepsilon-\frac{p_F^2}{2m}+\mu)$ im Nenner des $\Lambda^{(10)}$-Propagators dar, der demzufolge für Impulse $0\leqslant p\lesssim 11\ k_F$ und Energien $-100\ F^{-2}\lesssim\omega\lesssim -.1\ F^{-2}$ bekannt sein muß. Eine selbstkonsistente Behandlung der Gleichungen ist jedoch dennoch möglich, da $\Sigma(p;\omega)$ für große ω-Werte (bei festem Impuls p) eine sehr glatte Funktion der Energie ist, so daß Σ in guter Näherung linear interpoliert werden kann. Die selbstkonsistent berechneten Verläufe von $\Sigma_\omega^{(off)}(p)$ für feste Energiewerte finden wir in der Abbildungen 10 und 11. In diesem Zusammenhang sei auf die Approximation von Ho-Kim und Khanna 1974 (HK74) verwiesen, die bei der selbstkonsistenten Berechnung der Grundzustandsgrößen der Kernmaterie die off-shell Selbstenergie durch die ersten beiden Terme der Taylorentwicklung von Σ um einen vorgegebenen on-shell Wert approximiert haben. Diese Methode führt mithin auf eine on-shell Form des $\Lambda^{(10)}$-Propagators und umgeht die oben diskutierten Schwierigkeiten. Rechnungen von Haensel und Marville 1977 (HM77) auf der Grundlage einer nichtlokalen separablen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (S-Wellen) zeigten jedoch, daß diese "on-shell Reduktion" zur Berechnung der Grundzustandsgrößen der Kernmaterie ungeeignet ist. Die Berechnung des Imaginärteils des Massenoperators von den gleichen Autoren wies ebenfalls auf die wichtige Rolle der off-shell Effekte, denen $\Sigma^{(off)}(p;\omega)$ Rechnung trägt, hin (MH78). Eine Übersicht über die erstellten $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Programme finden wir im Anhang A.5.1.

8.6 Selbstkonsistente Lösung der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen.

Das in Kapitel 7 aufgeführte System der $\Lambda^{(11)}$-Gleichungen (7.2.34 -44) wurde für die Nukleon-Nukleon-Potentiale HJ, RSC und PAR mit dem Partialwellensatz von (8.4.1) selbstkonsistent gelöst. Als Startwerte für ε_p, $\hat{\varepsilon}_p$, n(p), z(p) und μ wurden die Ergebnisse konvergenter $\Lambda^{(00)}$- bzw. $\Lambda^{(10)}$-Rechnungen verwendet. Die Comuterprogramme sind in den Anhängen A.5.1 und A.5.2 angegeben.

Analog zu Abschnitt 8.4 werden im ersten Schritt die Eingabedaten (insbesondere p_F) eingelesen, Stützstellen für Gauß-, Simpsonintegration und alle energie- und impulsunabhängigen Größen (z.B $V^{JST}_{LL'}(r)$ für HJ, RSC, PAR) berechnet und Arbeitsfelder mit Impuls- ($p_1 \epsilon [0,p_1^*>p_F]$, $p_2 \epsilon [0,p_F]$, $q \epsilon [0,\bar{p}]$) und Energiewerten ($\varepsilon' \epsilon (-\infty,0]$, $\varepsilon(p_i)$, $\hat{\varepsilon}(p_i)$ mit i=1,2) belegt(*).

Die Selbstkonsistenzrechnung beginnt mit der Berechnung der Selbstenergie $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ für on- und off-shell Argumente, die in vier Schritten erfolgt (s. Anhang A.5.2 und Gleichungen (7.2.40-42)). Nach Durchlaufen der Impuls-, Energie- und Summations- (Quantenzahlen J,S,T,L) schleifen liegen Real- und Imaginärteil von Σ in Matrixform ($\Sigma^{(\Sigma)}(p_i;\hat{\varepsilon}_{p_j}) = \Sigma_{ij}$, $\Pi^{(\Sigma)}(p_i;\hat{\varepsilon}_{p_j}) = \Pi_{ij}$)

$$
\left(\Sigma^{(\Sigma)}(p_i,\hat{\varepsilon}_{p_j})\right)_{8\times 8} = \begin{array}{c|c}
 & \hat{\varepsilon}_1 \;\cdots\; \hat{\varepsilon}_{p_F} \;\cdots\; \hat{\varepsilon}_{p_1^*} \\
\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_F \\ \vdots \\ p_1^* \end{array} &
\begin{bmatrix}
\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & & & & & \\
\Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & & & & & \\
\Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & & & & & \\
 & & & \Sigma_{43} & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} & & \\
 & & & \Sigma_{53} & \Sigma_{54} & \Sigma_{55} & & \\
 & & & & & & \Sigma_{66} & \Sigma_{67} & \Sigma_{68} \\
 & & & & & & \Sigma_{76} & \Sigma_{77} & \Sigma_{78} \\
 & & & & & & \Sigma_{86} & \Sigma_{87} & \Sigma_{88}
\end{bmatrix}
\end{array}
, \qquad 8.5.1
$$

(*) Die auftretenden Größen und Variablen sind in 7.2 definiert. Für p_1^* wurde $p_1^* \leq \frac{m-m^*}{m} p_F \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m^*}{p_F^2}\left(\frac{m}{m-m^*}\right)^2\left(\frac{p_F^2}{2m^*} + \hat{V}_0^{\,2} + 2\mu\right)}\right)$ gewählt.

$$\left(\Pi^{(\Sigma)}(p_i, \hat{\varepsilon}_{p_j})\right)_{8\times 8} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_F \\ \cdot \\ \cdot \\ p_1^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \hat{\varepsilon}_{p_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\varepsilon}_{p_F} & \cdot & \cdot & \hat{\varepsilon}_{p_1^*} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & & & & & & \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & & & & & & \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & & & & & & \\ & & \Pi_{43} & \Pi_{44} & \Pi_{45} & & & & \\ & & \Pi_{53} & \Pi_{54} & \Pi_{55} & & & & \\ & & & & & \Pi_{66} & \Pi_{67} & \Pi_{68} & \\ & & & & & \Pi_{76} & \Pi_{77} & \Pi_{78} & \\ & & & & & \Pi_{86} & \Pi_{87} & \Pi_{88} & \end{array}\right] \end{array} \qquad 8.5.2$$

vor.

In (8.5.1) und (8.5.2) gehen Real- und Imaginärteil der $T^{(11)}$-Streumatrix gemäß (7.2.40-42) ein. Die Raumwinkelintegration $\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}_2}$ in Gleichung (7.2.40) kann wie in (8.4.3-5) behandelt werden.
Da sich der Imaginärteil der $T^{(11)}$-Amplitude nicht durch ein Polynom der Form (8.4.4) approximieren läßt, muß $\int_{(4\pi)} d\Omega_{\vec{p}_2}$ in den Ausdrücken (7.2.41-42) via $\int_{-1}^{+1} dx \approx \sum_{x_i}$ mit $x_i \in [-.9, -.4, 0, .4, .9]$ berechnet werden.

Die $T^{(11)}$-Matrix bestimmen wir über die Iterationsgleichung (7.2.34). Zu diesem Zweck muß die $T^{(00)}$-Streuamplitude berechnet werden. Dies führt, wie in den Kapiteln 4 und 8 diskutiert, auf ein System von gekoppelten linearen Integralgleichungen (ungekopplet im Fall der ungekoppelten S-, P- und D-Kanäle des Nukleon-Nukleon-Steuproblems), die mit der in 8.1 angegebenen Methode behandelt werden können.

Da die T-Matrix eine schwach veränderliche Funktion des Schwerpunktimpulses P ist, ersetzen wir in den Gleichungen (7.2.40) und (7.2.42) $P^2/4$ durch den winkelgemittelten Wert $\langle \frac{P^2}{4} \rangle$ (BM62,SP72,DA81,MD83):

$$\langle \frac{P^2}{4} \rangle \equiv \frac{P^2}{4} = \left\{ \frac{3}{5} p_F^2 \left(1 - \frac{p}{p_F}\right) \left(1 + \frac{\left(\frac{p}{p_F}\right)^2}{3\left(2 + \frac{p}{p_F}\right)}\right) \right\} \theta(p_F - p) + .3\, p_F^2\, \theta(p - p_F) , \qquad 8.5.3$$

wobei p für den Relativimpuls steht.

Zur Berechnung der Größen $z(p)$, $\alpha(p)$ und $\Lambda(p)$ muß die Energieableitung des Massenoperators, $\frac{\partial \Sigma_p^{(\Sigma)}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\hat{\varepsilon}_p}$, bestimmt werden. Zu diesem Zweck bietet sich eine kubische Splineapproximation von $\Sigma_p^{(\Sigma)}(\hat{\varepsilon}_p)$ aus (8.5.1) an.

Mit der Kenntnis von $\Sigma_p^{(\Sigma)}(\hat{\varepsilon}_p)$ kann die Einteilchenenergie $\mathcal{E}(p)$ neu berechnet werden. Der Verlauf der Einteilchendichte $n(p)$ folgt aus der Beziehung (7.2.27), während die Energie pro Nukleon nach (7.2.30') und zu Vergleichszwecken mit (7.2.33) zu berechnen ist.

Weitere Kenngrößen der Kernmaterie (ρ, r_0, m^*/m, $\varkappa$) werden wie in Abschnitt 8.4 bestimmt.

Im Konvergenztest sind die neu berechneten Werte für $\mathcal{E}(p)_{I+1}$, $n(p)_{I+1}$, $z(p)_{I+1}$ und $\gamma(p)_{I+1}$ mit den Startwerten $\mathcal{E}(p)_I$, $n(p)_I$, $z(p)_I$ und $\gamma(p)_I$ des Iten Iterationsschrittes zu vergleichen. Je nach Abweichung ist die Selbstkonsistenzrechnung mit den Startwerten $\mathcal{E}(p)_{I+1}$, $n(p)_{I+1}$, $z(p)_{I+1}$ zu wiederholen.

<u>Anmerkung:</u> Bei der Berechnung des Realteils der Selbstenergie (s. Gleichungen (7.2.14) bzw. (7.2.40)) ist über die Energievariable ε' ($\varepsilon' \in (-\infty, 0]$) zu integrieren. Numerische Untersuchungen von Beck und Sessler (BS66) an flüssigem Helium ^{3}He zeigen, daß dieser Term nur eine Korrektur des Einteilchenspektrums in der Umgebung der Fermikante bewirkt. Für eine Abschätzung im Fall der Kernmaterie wurde von folgenden zwei Methoden Gebrauch gemacht:

1) Mittels der Gleichungen (7.2.34-35) sieht man, daß $\Pi_P^{(T)}(\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}, \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}; \varepsilon')=0$ für $\varepsilon' < \varepsilon'_0 := 2(\mathcal{E}(p=0)-\mu) < 0$ gilt, da in diesem Fall der Energienenner des $\Lambda^{(11)}$-Propagators stets kleiner Null ist. Der Integrand von (vgl. (7.2.14))

$$A_{LL}^{BST} := -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_0'}^{0} d\varepsilon' \left({}^{(a)}\Pi^{(T)}_{|\vec{p}|}\left(\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|,\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|;\varepsilon'\right)\right)^{BST}_{LL} \Sigma'^{(G^{(1)})}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon-io) \qquad 8.5.4$$

mit $\Sigma'^{(\tilde{G}^{(1)})}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon-io)$ von (7.2.16) zeigt für $\varepsilon'-\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2}=0$ $(\omega=\varepsilon'-\varepsilon)$ ein Hauptwertverhalten.

2) Eine einfache Rechnung führt $\Sigma'^{(\tilde{G}^{(1)})}_{p}(\omega\pm io)$ aus (7.2.16) über in (der Term proportional zu $z(p_2)\,\alpha(p_2)^2$ wird vernachlässigt)

$$\Sigma'^{(\tilde{G}^{(1)})}_{p_2}(\varepsilon'-\varepsilon-io) \approx \frac{\varepsilon'-\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2}}{(\varepsilon'-\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2})^2+\alpha_{p_2}^2}, \qquad 8.5.5$$

was der von Beck und Sessler in (BS66) verwendeten Zweipunktfunktion entspricht. Eine Nullstelle des Nenners von (8.5.5) liegt für $\varepsilon'-\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2=p_F}=0$ vor, da nach (7.2.17) $\alpha(p_2)=0$ für $p_2=p_F$ $(p_2<p_1^*)$ gilt.

Einsetzen der Taylorentwicklung bis zum zweiten Glied von ${}^{(a)}\Pi^{(T)}_{\vec{p}}(\varepsilon')$ um die Stelle $\varepsilon'=\hat{\varepsilon}_{p_2}$ in (8.5.4) führt auf

$$A_{LL}^{BST} = -\frac{1}{2\pi}\left({}^{(a)}\Pi^{(T)}_{|\vec{p}|}\left(\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|,\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|;\varepsilon'=\hat{\varepsilon}_{p_2}\right)\right)^{BST}_{LL} \ln\left(\frac{(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2})^2+\alpha_{p_2}^2}{\varepsilon_0'^2+\alpha_{p_2}^2}\right) \qquad 8.5.6$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}\left({}^{(a)}\Pi^{(T)}_{|\vec{p}|}\left(\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|,\left|\frac{\vec{p}_1-\vec{p}_2}{2}\right|;\omega\right)\right)_{\omega=\hat{\varepsilon}_{p_2}}\Bigg)^{BST}_{LL}\left(-(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2})+\alpha_{p_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon-\hat{\varepsilon}_{p_2}}{\alpha_{p_2}}\right)-\varepsilon_0'\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{2}\alpha_{p_2}+\frac{1}{2}\varepsilon\ln\left(\frac{(\varepsilon+\hat{\varepsilon}_{p_2})^2+\alpha_{p_2}^2}{\varepsilon_0'^2+\alpha_{p_2}^2}\right)\right).$$

Die mit den Ausdrücken (8.5.4) und (8.5.6) berechneten Beiträge B_Σ zum Realteil der Selbstenergie $\Sigma(p_1;\hat{\varepsilon}_{p_1})$ sind in der Umgebung der Fermikante $(p_1\approx p_F)$ maximal $(/B_\Sigma/\lesssim 1\ \text{MeV})$ und tragen zur Ausbildung eines Plateaus der Selbstenergie für Impulse $p_1\approx p_F$ bei (vgl. Diskussion in Abschnitt 9.3).

9. Diskussion und Schlußbemerkungen.

9.1 Die $\Lambda^{(00)}$-Approximation.

Diese Näherung wurde in der Vergangenheit von vielen Autoren untersucht(*). Die beiden streuenden Nukleonen propagieren in dieser Näherung in den intermediären Streuzuständen als freie Teilchen; die "Startenergie" z in der $T^{(00)}$-Streumatrix ist durch die Selbstkonsistenzrechnung automatisch festgelegt. Bei der Berechnung des Massenoperators (mittleres Einteilchenpotential) wurde über alle S-, P- und D-Kanäle des Zweinukleonensystems summiert. Abbildung 1 zeigt das Einteilchenpotential im Fall der HJ-Wechselwirkung. Bei den Abbildungen 3 und 5 wurden die Potentiale RSC bzw. PAR verwendet. Zusätzlich sind in den Abbildungen die Einteilchenenergien und chemischen Potentiale (an der Fermikante) eingezeichnet. Abbildung 5 zufolge besitzt das effektive Einteilchenpotential $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ im Fall des PAR-Potentials die größte Tiefe ($\Sigma(0;\hat{\varepsilon}(0))=-84$ MeV), während sich mit dem HJ-Potential mit -68 MeV eine deutlich geringere Tiefe ergibt. Die Impulsverteilung der Einteilchenzustände n(p) fällt für PAR vor .856 (p=0) auf .84 an der Fermikante ($p_F=1.36\ F^{-1}$) ab (Abbildung 6). Das RSC-Potential liegt mit .837 (p=0) und .815 ($p=p_F$) unter diesen Werten. Den Dichteabfall mit der stärksten Krümmung für $p \to p_F$ ($p<p_F$) liefert das HJ-Potential: .788 (p=0) ... .758 ($p=p_F$).

Den Abbildungen 8 (HJ) und 9 (RSC) entnehmen wir den off-shell Verlauf des Massenoperators $\Sigma_\varepsilon(p)$. Danach sinkt die Tiefe von $\Sigma_\varepsilon(p)$

(*) (PU61,RP63,PRW66,FF71,FF72,GWW75,MA76,MH78).

für negativere Energieparameter ε. (Zur Lösung der $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen muß $\Sigma_\varepsilon(p)$ als Funktion von ε und p berechnet werden. Es zeigt sich, daß die Tiefe der off-shell Selbstenergie im Fall einer $\Lambda^{(10)}$-Rechnung im Vergleich zur $\Lambda^{(00)}$-Methode um ca. 6 MeV angehoben ist.)

Die Beiträge der S-, P- und D-Wellen $v({}^{2S+1}L_J) \equiv \Sigma_{LL}^{JST}(p)$ zum Gesamtmassenoperator $V(p) := \Sigma(\text{"}p = \hat{\varepsilon}(p)\text{"})$ sind den Abbildungen 12 (HJ), 13 (RSC) und 14 (PAR) zu entnehmen. In allen drei Fällen wird dabei die Bedingung von Sprung (SP72) $\sum_{i=0}^{2} v({}^3P_i) \approx 0$ gut erfüllt.

Der Verlauf der Energien pro Nukleon $E_0(N)/N$ entnehmen wir den Abbildungen 18 (HJ), 19 (RSC) und im Fall der PAR-Wechselwirkung der Abbildung 20. Die berechneten Werte sind in den Tabellen 5 bis 7 zusammengestellt. Die Größen der Kernmaterie an den Sättigungsimpulsen finden sich in Tabelle 16.

Ein Vergleich der $\Lambda^{(00)}$-Resultate mit Ergebnissen der Brueckner-Methode ist in Tabelle 17 gegeben. Die gute Übereinstimmung zwischen den Resultaten der $\Lambda^{(00)}$- und der Brueckner-Methode wird auch von den Autoren Ho-Kim und Khanna (HK74) bestätigt, deren $\Lambda^{(00)}$-Propagator, im Unterschied zur vorliegenden Arbeit, einen expliziten Paulioperator enthält. Die beste Übereinstimmung (bezüglich $E_0(N)/N$ und Sättigungsimpuls) ergibt sich beim RSC-Potential.

Die Kernmaterierechnungen von Fiset und Foster mit dem HJ-Potential (FF72) ermöglichen einen Vergleich von Bindungsenergie und mittlerem Nukleonenabstand r_0 am Sättigungsimpuls. Die Werte von (FF72) sind im Tabelle 4 aufgeführt. Danach differiert die Energie pro Nukleon um .17 MeV (-6.4 MeV in (FF72), -6.23 MeV in der vorliegenden Arbeit), während sowohl Sättigungsimpuls wie auch mittlerer Teilchenabstand r_0 übereinstimmen.

9.2 Die $\Lambda^{(10)}$-Approximation.

Diese Näherung wurde u.a. von den Autoren (RE64,FOS66,PRW66,FF71, FF72,HM77,MH78) untersucht. In der vorliegenden Arbeit wurde diese Methode mit dem modifizierten $\Lambda^{(10)}$-Propagator $M_\Lambda^{(10)}$ von (4.3.27) für die Potentiale HJ und RSC gelöst. Ein Vergleich der berechneten Kernmateriegrößen mit den Resultaten von Fiset und Foster (FF72) zeigt, daß die Bindungsenergie pro Nukleon im Fall des $M_\Lambda^{(10)}$-Propagators um .24 MeV größer ist (s. Tabelle 4). Der Sättigungsimpuls ist in beiden Fällen gleich groß (1.033 F^{-1}). Der mittlere Nukleonenabstand steigt von r_0=1.53 F ($\Lambda^{(10)}$) auf r_0=1.556 F ($M_\Lambda^{(10)}$).
Besondere Beachtung kommt der $\Lambda^{(10)}$-Methode durch eine Arbeit von Puff, Reiner und Wilets (PRW66) zu. Darin wird die Grundzustandsenergie für die drei Λ-Approximationen in dritter Ordnung Störungstheorie (mit Kastenpotential) berechnet. Der Vergleich mit den Resultaten der vollen Störungstheorie zeigt, daß die $\Lambda^{(10)}$-Methode am geringsten davon abweicht.
Die mit dem $M_\Lambda^{(10)}$-Propagator berechneten Kernmateriegrößen sind in den Tabellen 8 und 9 angegeben. Ein Vergleich der effektiven Massen m^*/m der Tabellen 6, 9, 11 und 14 (RSC-Potential) bzw. 5, 8, 10 und 13 (HJ-Potential) zeigt, daß sich diese nicht wesentlich von den Werten der $\Lambda^{(00)}$-Methode unterscheiden.
Die Selbstenergie $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ und mithin die Einteilchenenergien $\varepsilon(p)$ sind für beide Potentiale um ca. 8 MeV, relativ zu den $\Lambda^{(00)}$-Ergebnissen, angehoben (Abbildungen 1 und 3).
Die Besetzungszahlverteilung der Einteilchenzustände $n(p)$ ist für beide Potentiale, im Vergleich zur $\Lambda^{(00)}$-Methode, nach oben verschoben und zeigt beim HJ-Potential einen stärkeren Abfall für $p \to p_F$ ($p<p_F$) (Abb. 2 und 4).

Den Einfluß des $M_\Lambda^{(10)}$-Propagators auf die off-shell Selbstenergie $\Sigma_\varepsilon(p)$ zeigen die Abbildungen 8 (HJ) und 9 (RSC). Die Verläufe von $\Sigma_\varepsilon(p)$ für verschiedene Parameter ε sind in den Abbildungen 10 (HJ) und 11 (RSC) als Funktion des Impulses $0\ F^{-1}<p<15\ F^{-1}$ dargestellt. Der Trend zur Ausbildung eines Plateaus in der Umgebung der Fermikante wurde u.a. auch von den Autoren Haensel und Marville (HM77) gefunden. Im Vergleich zur RSC-Wechselwirkung ändert der Energieparameter ε in $\Sigma_\varepsilon(p)$ im Fall des HJ-Potentials die off-shell Selbstenergie deutlich stärker (Abb. 10 bzw. 11). Die Änderung der S-, P- und D-Kanäle des Massenoperators $v(^{2S+1}L_J)$ im Fall der $\Lambda^{(10)}$-Methode ist in den Abbildungen 12 (HJ) und 13 (RSC) dargestellt. Bei Verwendung des HJ-Potentials weichen nur die $^1S_0$-, $^3P_1$- und $^3S_1+^3D_1$-Kanäle, bei Verwendung des RSC-Potentials zusätzlich die $^1P_1$- und $^3P_2$-Kanäle deutlich von den $\Lambda^{(00)}$-Resultaten ab.
Der Trend, daß, falls das Pauliprinzip korrekter berücksichtigt wird, die Bindungsenergie pro Nukleon sinkt (FF72,HK74), wird in den Abbildungen 18 und 19 mit Nachdruck bestätigt. In Tabelle 16 sind die Größen der Kernmaterie an den jeweiligen Sättigungsimpulsen angegeben.

9.3 Die $\Lambda^{(11)}$-Approximation.

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der thermodynamisch konsistenten $\Lambda^{(11)}$-Methode diskutiert. Zusätzlich zum $\Lambda^{(11)}$-Propagator von (6.2.2') wurde der Propagator von Galitskii und Migdal (GM58, GA58,BI73+) $\Lambda^{(G)}$ von (3.3.14) untersucht. Im Unterschied zu $\Lambda^{(11)}$ propagieren die streuenden Nukleonen in den intermediären Zuständen als freie Teilchen ($\varepsilon(p)=(2m)^{-1}p^2+\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ mit $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))\equiv 0$). In beiden Propagatoren werden sowohl die Streuung in Zwischenzustände überhalb der Fermikante als auch Beiträge von virtuellen Löchern im

Fermisee berücksichtigt. Die $T^{(11)}$-Streumatrix wurde iterativ über die $T^{(00)}$-Amplitude berechnet (Gleichung (6.2.1)). Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen dienten für beide Propagatoren die Potentiale HJ, RSC und PAR. Untersucht wurde die $\Lambda^{(11)}$-Methode bisher von den Autoren Ho-Kim und Khanna (HK74) und Wegmann (WEG68,WW68). Die in der vorliegenden Arbeit diskutierte iterative Berechnung der $T^{(11)}$-Matrix wurde von Gall und Weigel (GW76+) für ein einfaches S-Wellen Potential mit Hard-Core untersucht. Wie sich zeigt, führt die Verwendung realistischer Nukleon-Nukleon-Potentiale (Kapitel 5) in allen S-, P- und D-Partialwellen auf den gleichen qualitativen Verlauf von Bindungsenergie pro Nukleon und chemischem Potential wie in (GW76+). Die Gleichheit dieser Größen am Sättigungsimpuls konnte, wie in (GW76+), nicht bestätigt werden.

Im Vergleich zur $\Lambda^{(00)}$-Methode (Pauliprinzip unberücksichtigt) ist die Bindungsenergie im Fall der $\Lambda^{(G)}$- und $\Lambda^{(11)}$-Methoden geringer. Dieser Trend wurde auch von den Autoren (FF72,HK74) bestätigt, wonach wie bereits oben erwähnt, eine korrektere Berücksichtigung des Pauliprinzips auf eine geringere Bindungsenergie führen soll.

Die berechnete Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$ und Selbstenergie $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ bei Verwendung des $\Lambda^{(G)}$-Propagators ist in Abbildung 5 für das PAR-Potential dargestellt. Sowohl $\varepsilon(p)$ als auch $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ sind demnach um ca. 10 MeV, relativ zu den $\Lambda^{(00)}$-Resultaten, angehoben. Ein qualitativ gleiches Verhalten zeigt sich für die Potentiale HJ und RSC (Abb. 7). Die Resultate im Fall des $\Lambda^{(11)}$-Propagators schließen sich diesem Trend, in Übereinstimmung mit (HK74), an (Abb. 15 (HJ), 16 (RSC) und 17 (PAR)).

Die Änderungen der einzelnen Partialwellen $v(^{2S+1}L_J)$ zum Massenoperator $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ sind in Abbildung 14 für das PAR-Potential dargestellt. Nur die $^1S_0$- und der gekoppelte $^3S_1$+$^3D_1$-Kanal werden um mehrere MeV verändert. Der Einfluß der restlichen Partialwellen auf

die Selbstenergie ist gering ($\lesssim |.8|$ MeV pro Partialwelle) und deshalb nicht eingezeichnet. Wie in den Abschnitten 9.1 und 9.2 wird $\sum_{i=0}^{2} v(^3P_i) \approx 0$ (SP72) von beiden Propagatoren erfüllt.
Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$, Massenoperator $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ und Breite der Einteilchenzustände $\gamma(p)$ bei Verwendung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators sind in den Abbildungen 15 (HJ), 16(RSC) und 17(PAR) abgebildet. In allen drei Fällen sind die Verläufe von $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ relativ zur $\Lambda^{(00)}$-Methode zwischen 5 bis 10 MeV angehoben. Entsprechendes gilt für die Resultate mit dem $\Lambda^{(G)}$-Propagator. Im Unterschied zur $\Lambda^{(00)}$-Methode, wo das effektive Einteilchenpotential für Impulse $p \leq p_F$ in guter Näherung parabolisch ansteigt, liefert die $\Lambda^{(11)}$-Methode im gleichen Impulsbereich einen mehr linearen Anstieg für kleine p_F-Werte. Wachsende Fermiimpulse ($p_F \gtrsim 1.56\ F^{-1}$) dagegen erhalten den parabolischen Verlauf von Σ. In der Umgebung der Fermikante ergab sich für alle drei untersuchten Potentiale ein Plateau für die Selbstenergie. Der Einfluß der zweiten Summanden in den Gleichungen (7.2.2) bzw. (7.2.11) auf die Selbst- bzw. Einteilchenenergie ist, wie von Beck und Sessler (BS66) im Fall von flüssigem ^{3}He gefunden wurde, gering. Dieser "Korrekturterm" ("Beck-Sessler Term") liefert einen negativen Beitrag zur Selbstenergie, dessen Betrag in der Umgebung der Fermikante maximal wird ($\lesssim 1$ MeV) und somit zur Ausbildung des erwähnten Plateaus an der Fermikante beiträgt. Eine Diskontinuität der Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$ an der Fermikante konnte, wie bei Ho-Kim und Khanna (HK74), nicht festgestellt werden. Die Kurven der Einteilchenbreiten $\gamma(p)$ sind den Abbildungen 15 bis 17 zu entnehmen. Sie sind durch $\gamma(p_F)=0$ (d.h. unendliche Lebensdauer der Einteilchenzustände an der Fermikante) charakterisiert.
Die Graphen der Bindungsenergien und der chemischen Potentiale für die Propagatoren $\Lambda^{(11)}$ und $\Lambda^{(G)}$ sind in den Abbildungen 18 (HJ), 19

(RSC) und 20 (PAR) dargestellt. In den Tabellen 10 bis 15 finden sich die berechneten Kernmateriegrößen zu den jeweiligen Fermiimpulsen. Tabelle 16 enthält die Größen der Kernmaterie an den Sättigungsimpulsen. Den Einfluß der $\Lambda^{(ij)}$-Propagatoren auf die effektive Masse m^*/m zeigen die Tabellen 10 (HJ), 11 (RSC) und 12 (PAR). Während die Methoden $\Lambda^{(00)}$, $\Lambda^{(10)}$ und $\Lambda^{(G)}$ je näherungsweise gleiche effektive Massen liefern, erhöht sich diese bei Verwendung der $\Lambda^{(11)}$-Approximation um ca. 20 bis 30%. Wie Vergleichsrechnungen zeigten, beruht dieser Anstieg zu ca. 80% auf dem $\Lambda^{(11)}$-Propagator. Den restlichen Beitrag bewirkt der "Beck-Sessler Term" (BS66), der, nach unserer Abschätzung aus Kapitel 8, die Selbstenergie in der Umgebung der Fermikante um ca. 1 MeV absenkt (s. Gleichungen (7.2.14) und (8.2.4) bis (8.2.6)).

Der Anstieg der effektiven Masse m^*/m nahe der Fermikante ($m^*/m \approx 1$) wurde u.a. von den Autoren (JLM76,SM80+,MA81) diskutiert (für weiterreichende Referenzen s. (MA81)). Anhand der Identitat $m^*/m = (\bar{m}/m)(\tilde{m}/m)$ (Gleichung (7.1.12'')) sieht man, daß die K-Masse $\tilde{m}/m$ von (7.1.12) (Maß für die Nichtlokalität der Selbstenergie $\Sigma(p;\varepsilon)$) und E-Masse $\bar{m}/m$ von (7.1.12') (Maß für die Energieabhängigkeit von $\Sigma(p;\varepsilon)$) die effektive Masse charakterisieren. Die Verläufe der K- und E-Massen als Funktion des Impulses p bei Verwendung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators sind den Abbildungen 21 (HJ), 22 (RSC) und 23 (PAR) zu entnehmen. (Die anderen Λ-Näherungen führen, wie oben bereits diskutiert, auf keine signifikante Erhöhung der effektiven Masse an der Fermikante.) Ein qualitativer Vergleich mit den Resultaten der Brueckner-Hartree-Fock-Approximation (BHF) für das Reid-Hard-Core-Potential (JLM76,MA81) bzw. das Potential von Hammann und Ho-Kim (SM80+) zeigt, daß die Energieabhängigkeit des Massenoperators im Fall der $\Lambda^{(11)}$-Methode für alle drei untersuchten Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen deutlich geringer

ist (d.h. $\bar{m}/m$ kleiner als bei BHF-Methode). Insbesondere ist der "Peak" am Fermiimpuls schwächer ausgeprägt. Der Verlauf der K-Masse ($\tilde{m}/m$) ist, relativ zur BHF-Approximation, angehoben und unterscheidet sich zudem durch einen geringeren Anstieg (vgl. Figuren 36 und 37 aus (MA81) mit den Abbildungen 21 bis 23 der vorliegenden Arbeit).

Die Impulsverteilungsfunktion n(p) weicht im Fall des $\Lambda^{(11)}$-Propagators für Impulse $p<p_F$ nur geringfügig von eins ab (.98 ... .92 für $0<p<p_F$), während der Beitrag zu n(p) für $p>p_F$ klein ist ($n(p) \lesssim 10^{-2}$). Diesen Trend zeigen alle drei untersuchten Potentiale. Ein qualitativ ähnlicher Verlauf der Impulsverteilungsfunktion wurde von Wegmann (WEG68) und Wegmann und Weigel (WW68) gefunden. Im Unterschied zur vorliegenden Arbeit steigt bei den genannten Autoren die Funktion n(p) unterhalb der Fermikante geringfügig an(*).

(*) Die Berechnung von n(p) bei Verwendung des Hard-Core-Potentials von Hamada-Johnston muß gesondert betrachtet werden. In diesem Fall ist die Normierung der Hilfsfunktion $\Lambda(p)$ von (7.2.9') mit $\bar{\nu} \lesssim 1$ in Gleichung (7.2.9') vorzunehmen, da die Summenregel (3.1.8) nur noch approximativ erfüllt wird (vgl. hierzu (WI78)).
Den Einfluß des Parameters $\bar{\nu}$ auf den Verlauf von n(p) erkennt man mittels der Beziehung (7.2.27). (Es lassen sich zwei Grenzfälle angeben: Für $\bar{\nu}=1$ resultiert der Impulsverlauf für den Fall einer Soft-Core-Wechselwirkung (RSC,PAR); für $\bar{\nu} \simeq z(p)$ ($\bar{\nu}>z(p)$) ergibt (7.2.27) den Impulsverlauf z(p) der $\Lambda^{(ij)}$-Methoden (ij=00,10) (vgl. (7.1.4) und Tabelle 18).)
In der vorliegenden Arbeit wurde für das Hard-Core-Potential (HJ) $\bar{\nu}=1$ gewählt. Der quantitative Zusammenhang zwischen z(p) und n(p) in Abhängigkeit von $\bar{\nu}$ ist in Tabelle 18 zusammengestellt.
Ergänzend ist dort die Impulsverteilung eines verdünnten Fermigases ($n^{BEL}(p)$, Hard-Core-Radius c=.5 F^{-1}) aufgeführt. Der Vergleich von $n^{BEL}(p)$ mit der Impulsverteilung $n^{HC}(p)$ im Fall des "HJ-Potentials" ($V(r<c)=\infty$, $V(r>c)=0$, c=Hard-Core-Radius des HJ-Potentials, s. Tabelle 2) ist für $\bar{\nu}=.71$ angegeben.

Abschließend läßt sich feststellen, daß entgegen der Erwartung die $\Lambda^{(11)}$-Methode, in der Näherung, wie sie hier untersucht wurde (d.h. Iteration über die $T^{(00)}$-Matrix), zu keiner besseren Erfüllung des Hugenholtz-van-Hove-Theorems (HV58) führt, welches allerdings nur störungstheoretisch bewiesen worden ist (s. auch Brueckner in (BR58)) Dies kann in erster Linie an der iterativen Berechnung der $T^{(11)}$-Matrix liegen, da eine exakte Lösung der $T^{(11)}$-Integralgleichung, wie in der Arbeit von Weigel und Wegmann (WW68) für ein einfaches separables Nukleon-Nukleon-Potential demonstriert, die geforderte Gleichheit von Bindungsenergie und chemischem Potential am Sättigungs impuls approximativ ergibt. Weitere Ursachen sind in der Winkelmittelung des $\Lambda^{(11)}$-Propagators, der Quasiteilchennäherung für die Spektralfunktion ($\gamma(p)=0$) und der effektiven Massenapproximation der Einteilchenenergie zu suchen.

Ob die $\Lambda^{(11)}$-Näherung auf eine bessere Beschreibung der Kernmaterie führt, bleibt eine offene Frage, da durch die verwendeten Näherungen wichtige Eigenschaften des vollen $\Lambda^{(11)}$-Propagators vernachlässigt werden. Außerdem dürfte die Existenz eines (möglichen) Pols der $T^{(11)}$-Matrix (BSI74) einen Einfluß auf die Einteilchenenergie an der Fermikante (d.h. auf das chemische Potential) haben, der in der einmal iterierten $T^{(11)}$-Integralgleichung ignoriert wird. Ein weiterer Grund für die Abweichung der Bindungsenergie pro Nukleon vom experimentellen Wert von $\approx$-16 MeV (p_F=1.36 F^{-1}) ist in der Beschränkung auf die simultane Korrelation von nur zwei Nukleonen in Kernmaterie zu suchen. Der Einfluß von Dreiteilchenkorrelationen wurde von E.O. Fiset 1970 für die $\Lambda^{(10)}$-Approximation untersucht (FI70). Für ein einfaches Yamaguchi-Potential (in S-Zuständen) ist demnach mit einer Zunahme der Bindungsenergie um 1 bis 2 MeV zu rechnen.

A. Anhänge.

A.1 Real- und Imaginärteile des $\Lambda^{(00)}$-Propagators.

Für Energien $\beta > 0$ (s. (4.2.7)) wird der $\Lambda^{(00)}$-Propagator von (4.2.6) komplexwertig. Mit der Zerlegung $\Sigma^{(\Lambda)}$ bzw $\pi^{(\Lambda)}$ für Real- und Imaginärteil von $\Lambda^{(00)}$ schließen sich die folgenden Ausdrücke an ($\varphi_< = \sqrt{\beta}\, r_<$, $\varphi_> = \sqrt{\beta}\, r_>$, $\sqrt{\beta} = k$):

$$\Sigma^{(\Lambda)}_{L=0}(t, t'; \beta) = -\frac{1}{k} \sin\varphi_< \cos\varphi_> , \qquad \text{A.1.1}$$

$$\pi^{(\Lambda)}_{0}(t, t'; \beta) = -\frac{1}{k} \sin\varphi_< \sin\varphi_> , \qquad \text{A.1.2}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\Lambda)}_{1}(t, t'; \beta) = \frac{1}{k}\big(&\sin\varphi_> \cos\varphi_< - \varphi_<^{-1} \sin\varphi_> \sin\varphi_< \\ &+ \varphi_>^{-1} \cos\varphi_> \cos\varphi_< - (\varphi_< \varphi_>)^{-1} \sin\varphi_< \cos\varphi_> \big),\end{aligned} \qquad \text{A.1.3}$$

$$\begin{aligned}\pi^{(\Lambda)}_{1}(t, t'; \beta) = \frac{1}{k}\big(&\varphi_>^{-1} \sin\varphi_> \cos\varphi_< - (\varphi_> \varphi_<)^{-1} \sin\varphi_> \sin\varphi_< \\ &- \cos\varphi_> \cos\varphi_< - \varphi_<^{-1} \sin\varphi_< \cos\varphi_> \big),\end{aligned} \qquad \text{A.1.4}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(\Lambda)}_{2}(t, t'; \beta) = \frac{1}{k}\big(&\cos\varphi_< \cos\varphi_> \left(9 \varphi_<^{-1} \varphi_>^{-2} - 3 \varphi_<^{-1}\right) + 9 (\varphi_< \varphi_>)^{-1} \cos\varphi_< \sin\varphi_> \\ &+ \sin\varphi_< \cos\varphi_> \left(-9 (\varphi_< \varphi_>)^{-2} + 3 \varphi_>^{-2} + 3 \varphi_<^{-2} - 1\right) \\ &+ \sin\varphi_< \sin\varphi_> \left(-9 \varphi_<^{-2} \varphi_>^{-1} + 3 \varphi_>^{-1}\right)\big),\end{aligned} \qquad \text{A.1.5}$$

$$\begin{aligned}\pi^{(\Lambda)}_{2}(t, t'; \beta) = \frac{1}{k}\big(&-9 (\varphi_> \varphi_<)^{-1} \cos\varphi_> \cos\varphi_< + \cos\varphi_< \sin\varphi_> \left(9 \varphi_<^{-1} \varphi_>^{-2} - 3 \varphi_<\right) \\ &+ \sin\varphi_< \cos\varphi_> \left(9 \varphi_<^{-2} \varphi_>^{-1} - 3 \varphi_>^{-1}\right) \\ &- \sin\varphi_< \sin\varphi_> \left(-9 (\varphi_< \varphi_>)^{-2} + 3 \varphi_<^{-2} + 3 \varphi_>^{-2} - 1\right)\big).\end{aligned} \qquad \text{A.1.6}$$

A.2 Real- und Imaginärteile des $\hat{\Lambda}^{(00)}$-Propagators und der Hilfsfunktionen $\hat{\varphi}_L$.

Für den umdefinierten $\Lambda^{(00)}$-Propagator im Fall einer Wechselwirkung mit Hard-Core finden wir durch Einsetzen der Gleichungen aus Anhang A.1 in den Ausdruck (4.7.4) die Gleichungen für $\hat{\Lambda}_L(r,r';\beta) = \Sigma_L^{(\hat{\Lambda})}(r,r';\beta) + i\,\Pi_L^{(\hat{\Lambda})}(r,r';\beta)$. Mit der Relation (4.7.5) für $\hat{\varphi}_L(p,r)$ berechnet man die Hilfsfunktionen $\hat{\varphi}_L(p,r) = \Sigma_L^{(\hat{\varphi})}(p,r) + i\,\Pi_L^{(\hat{\varphi})}(p,r)$.
Im einzelnen lauten die Gleichungen(*):

$$\Sigma_{L=0}^{(\hat{\Lambda})}(r,r',c,\beta) = \frac{1}{k}\left(\cos(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\,\sin\varphi_c - \cos\varphi_>\,\sin\varphi_c\right), \qquad \text{A.2.1}$$

$$\Pi_0^{(\hat{\Lambda})}(r,r',c;\beta) = \frac{1}{k}\left(\sin(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\,\sin\varphi_c - \sin\varphi_>\,\sin\varphi_c\right), \qquad \text{A.2.2}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(\hat{\Lambda})}(r,r',c;\beta) = \frac{1}{k}\Big(&-\varphi_c^{-1}\sin\varphi_>\,\sin\varphi_c + \varphi_>^{-1}\cos\varphi_>\,\cos\varphi_c + \sin\varphi_>\,\cos\varphi_c \\ &-(\varphi_c\varphi_>)^{-1}\cos\varphi_>\,\sin\varphi_c + \left(\varphi_c^{-1}\sin\varphi_c - \cos\varphi_c\right)\left(1+\varphi_c^{-2}\right)^{-1} \\ &\Big(\cos(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left(\varphi^{-1}+\varphi'^{-1}+\varphi_c^{-1}\left((\varphi\varphi')^{-1}-1\right)\right) \\ &-\sin(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left((\varphi\varphi')^{-1}-(\varphi\varphi_c)^{-1}-(\varphi'\varphi_c)^{-1}-1\right)\Big)\Big),\end{aligned} \qquad \text{A.2.3}$$

$$\begin{aligned}\Pi_1^{(\hat{\Lambda})}(r,r',c,\beta) = \frac{1}{k}\Big(&-(\varphi_>\varphi_c)^{-1}\sin\varphi_>\,\sin\varphi_c - \cos\varphi_>\,\cos\varphi_c + \varphi_>^{-1}\sin\varphi_>\,\cos\varphi_c \\ &+\varphi_c^{-1}\sin\varphi_c\,\cos\varphi_> + \left(\varphi_c^{-1}\sin\varphi_c - \cos\varphi_c\right)\left(1+\varphi_c^{-2}\right)^{-1} \\ &\Big(\cos(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left((\varphi\varphi')^{-1}-(\varphi\varphi_c)^{-1}-(\varphi'\varphi_c)^{-1}-1\right) \\ &+\sin(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left(\varphi^{-1}+\varphi'^{-1}+\varphi_c^{-1}\left((\varphi\varphi')^{-1}-1\right)\right)\Big)\Big),\end{aligned} \qquad \text{A.2.4}$$

(*) $r>c$, $r'>c$ und $r \gtrless r'$ zulässig; $\hat{\Lambda}_L(c,c,c;\beta)=0$.
Zur Definition von $\varphi_<$ und $\varphi_>$ siehe Anhang A.1.
Zusätzlich definieren wir $\varphi = kr$, $\varphi' = kr'$, $\varphi_c = kc$.

$$\Sigma_2^{(\hat{n})}(r, r', c; \beta) = -\frac{\varphi_2(\varphi_<)}{k}\left(3\varphi_>^{-2}\cos\varphi_> + 3\varphi_>^{-1}\sin\varphi_> - \cos\varphi_>\right) \qquad \text{A.2.5}$$

$$+ \frac{\varphi_2(\varphi_c)}{k}\,\varphi_c^4\left(9 + 3\varphi_c + \varphi_c^4\right)^{-1}\Big(\cos(\varphi+\varphi'-\varphi_c)$$

$$\left(f_1\left(3\varphi_c^{-2} - 1\right) + 3f_2\,\varphi_c^{-1}\right)$$

$$- \sin(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left(3f_1\varphi_c^{-1} - f_2\left(3\varphi_c^{-2}-1\right)\right)\Big),$$

$$\Pi_2^{(\hat{n})}(r, r', c; \beta) = -\frac{\varphi_2(\varphi_<)}{k}\left(3\varphi_>^{-2}\sin\varphi_> - 3\varphi_>^{-1}\cos\varphi_> - \sin\varphi_>\right) \qquad \text{A.2.6}$$

$$+ \frac{\varphi_2(\varphi_c)}{k}\,\varphi_c^4\left(9 + 3\varphi_c^2 + \varphi_c^4\right)^{-1}\Big(\sin(\varphi+\varphi'-\varphi_c)$$

$$\left(f_1\left(3\varphi_c^{-2} - 1\right) + 3f_2\,\varphi_c^{-1}\right)$$

$$+ \cos(\varphi+\varphi'-\varphi_c)\left(3f_1\varphi_c^{-1} - f_2\left(3\varphi_c^{-2}-1\right)\right)\Big),$$

$$f_1 := \left(3\varphi^{-2}-1\right)\left(3\varphi'^{-2}-1\right) - 9(\varphi\varphi')^{-1}, \qquad \text{A.2.7}$$

$$f_2 := 3\varphi'^{-1}\left(3\varphi^{-2}-1\right) + 3\varphi^{-1}\left(3\varphi'^{-2}-1\right). \qquad \text{A.2.8}$$

In der Integralgleichung für die ψ -Funktion (4.7.3) haben wir die Funktion $\hat{\psi}_L(r,c;p';\beta) = \Sigma_L^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta) + i\,\Pi_L^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta)$ in der Form ($\varphi_p := pr$, $\varphi_{p'} := p'r$, $\varphi_{pc} = pc$, $\varphi_{p'c} = p'c$)

$$\Sigma_0^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta) = \sin\varphi_{p'} - \cos(\varphi-\varphi_c)\,\sin\varphi_{p'c}\,, \qquad \text{A.2.9}$$

$$\Pi_0^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta) = -\sin(\varphi-\varphi_c)\,\sin\varphi_{p'c}\,, \qquad \text{A.2.10}$$

$$\Sigma_1^{(\hat{\varphi})}(r,c;p',\beta) = \varphi_{p'}^{-1}\sin\varphi_{p'} - \cos\varphi_{p'} + \cos(\varphi-\varphi_c)\left(\cos\varphi_{p'c} - \varphi_{p'c}^{-1}\sin\varphi_{p'c}\right)$$

$$+ \left(\varphi_c^{-1}-\varphi^{-1}\right)\left(1+\varphi_c^{-2}\right)^{-1}\sin(\varphi-\varphi_c)\left(\cos\varphi_{p'c} - \varphi_{p'c}^{-1}\sin\varphi_{p'c}\right), \qquad \text{A.2.11}$$

$$\Pi_1^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta) = \sin(\varphi-\varphi_c)\left(\cos\varphi_{p'c} - \varphi_{p'c}^{-1}\sin\varphi_{p'c}\right) \qquad \text{A.2.12}$$

$$+ \left(\varphi_c^{-1}-\varphi^{-1}\right)\left(1+\varphi_c^{-2}\right)\cos(\varphi-\varphi_c)\left(\varphi_{p'c}^{-1}\sin\varphi_{p'c} - \cos\varphi_{p'c}\right),$$

$$\Sigma_2^{(\hat{\varphi})}(r,c;p';\beta) = \varphi_2(\varphi_{p'}) - \varphi_c^4\,\varphi_2(\varphi_{p'c})\left(9+3\varphi_c^2+\varphi_c^4\right)^{-1} \qquad \text{A.2.13}$$

$$\left(\tilde{\tau}_1\cos(\varphi-\varphi_c) - \tilde{\tau}_2\sin(\varphi-\varphi_c)\right),$$

$$\Pi_2^{(\hat{\varphi})}(r, c; p'; \beta) = -\varphi_c^4\, \varphi_2(\varphi_{pc})\, (9 + 3\varphi_c^2 + \varphi_c^4)^{-1} \qquad \text{A.2.14}$$

$$(\tilde{f}_1 \sin(\varphi - \varphi_c) + \tilde{f}_2 \cos(\varphi - \varphi_c)),$$

$$\tilde{f}_1 := (3\varphi^{-2} - 1)(3\varphi_c^{-2} - 1) + 9(4\varphi_c)^{-1}, \qquad \text{A.2.15}$$

$$\tilde{f}_2 := 3\varphi_c^{-1}(3\varphi^{-2} - 1) - 3\varphi^{-1}(3\varphi_c^{-2} - 1) \qquad \text{A.2.16}$$

einzusetzen.

In der Gleichung für die T-Matrix (4.7.13) ist $\hat{\varphi}_L(c, r'; p; \beta) = \Sigma_L^{(\hat{\varphi})} + i\,\Pi_L^{(\hat{\varphi})}$ in der Form

$$\Sigma_0^{(\hat{\varphi})}(c, r'; p; \beta)\Big|_{r'<c} = \sin\varphi_{p'} - (\sin\varphi)^{-1} \sin\varphi' \sin\varphi_{pc}, \qquad \text{A.2.17}$$

$$\Pi_0^{(\hat{\varphi})}(c, r'; p; \beta)\Big|_{r'<c} = 0, \qquad \text{A.2.18}$$

$$\Sigma_0^{(\hat{\varphi})}(c, r'; p; \beta)\Big|_{r'>c} = \sin\varphi_{p'} - \cos(\varphi' - \varphi_c) \sin\varphi_{pc}, \qquad \text{A.2.19}$$

$$\Pi_0^{(\hat{\varphi})}(c, r'; p; \beta)\Big|_{r'>c} = -\sin(\varphi' - \varphi_c) \sin\varphi_{pc}, \qquad \text{A.2.20}$$

$$\Sigma_1^{(\hat{\varphi})}(c,\tau',\rho,\beta)\Big|_{\tau'<c} = \varphi_\rho'^{-1}\sin\varphi_\rho' - \cos\varphi_\rho' - (\varphi_c^{-1}\sin\varphi_c - \cos\varphi_c)^{-1}$$

$$(\varphi_{\rho c}^{-1}\sin\varphi_{\rho c} - \cos\varphi_{\rho c})(\varphi'^{-1}\sin\varphi' - \cos\varphi'), \qquad \text{A.2.21}$$

$$\Pi_1^{(\hat{\varphi})}(c,\tau';\rho;\beta)\Big|_{\tau'<c} = 0, \qquad \text{A.2.22}$$

$$\Sigma_1^{(\hat{\varphi})}(c,\tau';\rho;\beta)\Big|_{\tau'>c} = \varphi_\rho'^{-1}\sin\varphi_\rho' - \cos\varphi_\rho' - (\varphi_{\rho c}^{-1}\sin\varphi_{\rho c} - \cos\varphi_{\rho c}) \qquad \text{A.2.23}$$

$$(1+\varphi_c^{-2})^{-1}\left((1+(\varphi_c\varphi')^{-1})\cos(\varphi'-\varphi_c)\right.$$

$$\left.-(\varphi_c\varphi')^{-1}(\varphi_c-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi_c)\right),$$

$$\Pi_1^{(\hat{\varphi})}(c,\tau';\rho;\beta)\Big|_{\tau'>c} = (\cos\varphi_{\rho c} - \varphi_{\rho c}^{-1}\sin\varphi_{\rho c})(1+\varphi_c^{-2})^{-1} \qquad \text{A.2.24}$$

$$\left((1+(\varphi_c\varphi')^{-1})\sin(\varphi'-\varphi_c) + (\varphi_c\varphi')^{-1}(\varphi_c-\varphi')\cos(\varphi'-\varphi_c)\right),$$

$$\Sigma_2^{(\hat{\varphi})}(c,\tau';\rho,\beta)\Big|_{\tau'<c} = \varphi_2(\varphi_\rho') - \varphi_2(\varphi_{\rho c})\,\varphi_2^{-1}(\varphi_c)\,\varphi_2(\varphi'), \qquad \text{A.2.25}$$

$$\Pi_2^{(\hat{\varphi})}(c,\tau';\rho;\beta)\Big|_{\tau'<c} = 0, \qquad \text{A.2.26}$$

$$\Sigma_2^{(\hat{\varphi})}(c,\tau',\rho,\beta)\Big|_{\tau'>c} = \Sigma_2^{(\hat{\varphi})}(\tau',c;\rho;\beta) \qquad \text{von (A.2.13),} \qquad \text{A.2.27}$$

$$\Pi_2^{(\hat{\varphi})}(c,\tau',\rho,\beta)\Big|_{\tau>c} = \Pi_2^{(\hat{\varphi})}(\tau',c;\rho;\beta) \qquad \text{von (A.2.14)} \qquad \text{A.2.28}$$

zu benutzen.

A.3 Ortsableitungen des $\Lambda^{(00)}$-Propagators.

Mit den Definitionen $\varphi := wr$, $\varphi' := wr'$, $w := (|\beta|)^{1/2}$ findet man für Energien $\beta < 0$ durch Differenzieren der Ausdrücke (4.2.9-11)

$$\frac{d}{dr'} \Lambda_0^{(00)}(r, r'; \beta) = -\frac{1}{2} e^{-(\varphi+\varphi')} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\varphi-\varphi') e^{-|\varphi-\varphi'|} \quad (*) , \qquad \text{A.3.1}$$

$$\frac{d^2}{dr'^2} \Lambda_0(r, r'; \beta) = \frac{w}{2} e^{-(\varphi+\varphi')} - \frac{1}{2}\left(w - 2\,\delta(r-r')\right) e^{-|\varphi-\varphi'|} , \qquad \text{A.3.2}$$

$$\frac{d}{dr'} \Lambda_1(r, r'; \beta) = \frac{1}{2}\left(1+\varphi^{-1}\right)\left(1+\varphi'^{-1}+\varphi'^{-2}\right) e^{-(\varphi+\varphi')} \qquad \text{A.3.3}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi^{-1}-\varphi'^{-1}+\varphi^{-1}\varphi'^{-2}+\sigma(\varphi-\varphi')\left(1+\varphi'^{-2}-\varphi^{-2}\varphi^{-1}\right)\right) e^{-|\varphi+\varphi'|} ,$$

$$\frac{d^2}{dr'^2} \Lambda_1(r, r'; \beta) = -\frac{w}{2}\left(1+\varphi^{-1}\right)\left(1+\varphi'^{-1}+2\varphi'^{-2}+2\varphi'^{-3}\right) e^{-(\varphi+\varphi')} \qquad \text{A.3.4}$$

$$-\frac{w}{2}\left(1+2\varphi'^{-2}-(\varphi\varphi')^{-1}-2\varphi^{-1}\varphi'^{-3}+\sigma(\varphi-\varphi')\left(\varphi^{-1}-\varphi'^{-1}-2\varphi'^{-3}+2\varphi^{-1}\varphi'^{-2}\right)\right)$$

$$e^{-|\varphi-\varphi'|} + \delta(r-r') ,$$

$$\frac{d}{dr'} \Lambda_2(r, r'; \beta) = -\frac{1}{2}\left(1+3\varphi^{-1}+3\varphi^{-2}\right)\left(1+3\varphi'^{-1}+6\varphi'^{-2}+6\varphi'^{-3}\right) e^{-(\varphi+\varphi')}$$

$$\text{A.3.5}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+3\varphi^{-1}\sigma(\varphi-\varphi')+3\varphi^{-2}\right)\left(-6\varphi'^{-3}+\left(1-3\varphi'^{-1}\sigma(\varphi-\varphi')+6\varphi'^{-2}\right)\sigma(\varphi-\varphi'\right.$$

$$e^{-|\varphi-\varphi'|} ,$$

(*) sgn(x) ist die Signum-Funktion: $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x)$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

$$\frac{d^2}{d\tau'^2}\,\Lambda_2(\tau,\tau';\beta) = \frac{W}{2}\,(1+3\varphi^{-1}+3\varphi^{-2})\,(1+3\varphi'^{-1}+9\varphi'^{-2}+18\varphi'^{-3}+18\varphi'^{-4}) \qquad \text{A.3.6}$$

$$e^{-(\varphi+\varphi')}$$

$$-\frac{W}{2}\,(1+3\varphi^{-1}\delta(\varphi-\varphi')+3\varphi^{-2})$$

$$\left(1+9\varphi'^{-2}+18\varphi'^{-4}-3\varphi'^{-1}\delta(\varphi-\varphi')(1+6\varphi'^{-2})\right)\;e^{-|\varphi-\varphi'|}+\delta(\tau-\tau').$$

Für $\beta>0$ sind die komplexwertigen Propagatoren der Gleichungen (4.2.12-17) zu differenzieren. Mit der Nomenklatur von oben schließen sich folgende Ausdrücke an:

$$\frac{d}{d\tau'}\,\Sigma_{L=0}^{(\Lambda^{00})}(\tau,\tau';\beta) = -\frac{1}{2}\,\left(\cos(|\varphi-\varphi'|)\,\delta(\varphi-\varphi')+\cos(\varphi+\varphi')\right), \qquad \text{A.3.7}$$

$$\frac{d}{d\tau'}\,\Pi_{L=0}^{(\Lambda^{00})}(\tau,\tau',\beta) = -\frac{1}{2}\,\left(\sin(|\varphi-\varphi'|)\,\delta(\varphi-\varphi')+\sin(\varphi+\varphi')\right), \qquad \text{A.3.8}$$

$$\frac{d^2}{d\tau'^2}\,\Sigma_0^{(\Lambda^{00})}(\tau,\tau';\beta) = -\frac{W}{2}\,\left(\sin(|\varphi-\varphi'|)\,\delta^2(\varphi-\varphi')-\sin(\varphi+\varphi')\right) \qquad \text{A.3.9}$$

$$+\,\delta(\tau-\tau'),$$

$$\frac{d^2}{d\tau'^2}\,\Pi_0^{(\Lambda^{00})}(\tau,\tau';\beta) = -\frac{W}{2}\,\left(-\cos(|\varphi-\varphi'|)\,\delta^2(\varphi-\varphi')+\cos(\varphi+\varphi')\right), \qquad \text{A.3.10}$$

$$\frac{d}{d\tau'}\,\Sigma_1^{(\Lambda^{00})}(\tau,\tau';\beta) = \frac{1}{2}\,\Big(\cos(|\varphi-\varphi'|)\,\left(-\operatorname{sgn}(\varphi-\varphi')+\varphi^{-1}\varphi'^{-2}|\varphi-\varphi'|\right)$$

$$+\cos(\varphi+\varphi')\,\left(1-(\varphi\varphi')^{-1}-\varphi'^{-2}\right) \qquad \text{A.3.11}$$

$$+\sin(|\varphi-\varphi'|)\,\left(-\operatorname{sgn}(\varphi-\varphi')\,|\varphi-\varphi'|\,(\varphi\varphi')^{-1}-\varphi^{-1}\varphi'^{-2}\right)$$

$$+\sin(\varphi+\varphi')\,\left(\varphi^{-1}\varphi'^{-2}-(\varphi+\varphi')(\varphi\varphi')^{-1}\right)\Big),$$

$$\frac{d}{d\tau'} \overset{(\Lambda^{00})}{\Pi_1}(\tau,\tau';\beta) = \frac{1}{2}\cos(|\varphi-\varphi'|)\,\sigma(\varphi-\varphi')\,(\varphi\varphi')^{-1}\,(\varphi-\varphi') \qquad \text{A.3.12}$$

$$+ \frac{1}{2}\cos(\varphi+\varphi')\,(\varphi\varphi')^{-1}\,(\varphi+\varphi')$$

$$+ \frac{1}{2}\sin(|\varphi-\varphi'|)\left((\varphi\varphi')^{-1}\sigma(\varphi-\varphi') + \varphi^{-1}\varphi'^{-2}|\varphi-\varphi'|\right)$$

$$- \frac{1}{2}\varphi'^{-2}\sin(\varphi+\varphi')$$

$$+ \sin\varphi\,(\sin\varphi'\;\varphi^{-1}\varphi'^{-2} - \cos\varphi'\,(\varphi\varphi')^{-1} + \cos\varphi\,\sin\varphi',$$

$$\frac{d^2}{d\tau'^2} \overset{(\Lambda^{00})}{\Pi_1}(\tau,\tau';\beta) = \frac{W}{2}\Big(\cos(|\varphi-\varphi'|)\;|\varphi-\varphi'|\,(\varphi\varphi')^{-1}(1-2\varphi'^{-2}) \qquad \text{A.3.13}$$

$$+ \cos(\varphi+\varphi')\,(2\varphi^{-1}\varphi'^{-2} + 2\varphi'^{-3} - (\varphi+\varphi')(\varphi\varphi')^{-1})$$

$$+ \sin(|\varphi-\varphi'|)\,(-1 + (\varphi\varphi')^{-1} + 2\varphi^{-1}\varphi'^{-3} + 2\sigma(\varphi-\varphi')\,|\varphi-\varphi'|\;\varphi^{-1}\varphi$$

$$+ \sin(\varphi+\varphi')\,(-1 + (\varphi\varphi')^{-1} - 2\varphi^{-1}\varphi'^{-3} + 2\varphi'^{-2})\Big)$$

$$+ \delta(\tau-\tau'),$$

$$\frac{d^2}{d\tau'^2} \overset{(\Lambda^{00})}{\Pi_1}(\tau,\tau',\beta) = \frac{W}{2}\Big(-\cos(|\varphi-\varphi'|)\,\left(2\varphi^{-1}\varphi'^{-1} + 2\sigma(\varphi-\varphi')\,|\varphi-\varphi'|\;\varphi^{-1}\varphi'^{-2}\right)$$

$$- 2\varphi'^{-2}\cos(\varphi+\varphi') \qquad \text{A.3.14}$$

$$+ \sin(|\varphi-\varphi'|)\,\left((\varphi\varphi')^{-1}|\varphi-\varphi'|\,(1-2\varphi'^{-2}) - 2\sigma(\varphi-\varphi')\;\varphi^{-1}\varphi'^{-2}\right)$$

$$+ \sin(\varphi+\varphi')\,(2\varphi'^{-3} - (\varphi\varphi')^{-1}(\varphi+\varphi'))$$

$$+ \sin\varphi\,(\sin\varphi'\,(2(\varphi\varphi')^{-1} - 4\varphi^{-1}\varphi'^{-3}) + 4\cos\varphi'\;\varphi^{-1}\varphi'^{-2})$$

$$+ 2\cos\varphi\,\cos\varphi'\Big),$$

$$\Sigma_2^{(\Lambda^{00})}(r,r';\beta) = \frac{1}{2w}\Big(9(rr')^{-1}\,(\sin(r+r') + \sin(|r-r'|)) \qquad \text{A.3.15}$$

$$+ (3r'^{-2} + 3r^{-2} - 1 - 9\,r^{-2}r'^{-2})(\sin(r+r') - \sin(|r-r'|))$$

$$- 3(\cos(r+r')\,(r+r')\,(rr')^{-1} + \cos(|r-r'|)\,|r-r'|\,(rr')^{-1})$$

$$+ 9(rr')^{-1}(\cos(r+r')\,(r+r')\,(rr')^{-1} - \cos(|r-r'|)\,|r-r'|\,(rr')^{-1})\Big),^{(*)}$$

$$\Pi_2^{(\Lambda^{00})}(r,r';\beta) = \frac{3}{2w}\Big(-|r-r'|\,((rr')^{-1} + 3(rr')^{-2})\sin(|r-r'|) \qquad \text{A.3.16}$$

$$-(r+r')\,((rr')^{-1} - 3(rr')^{-2})\,\sin(r+r')$$

$$+(r^{-2} + r'^{-2} - 3(rr')^{-1} - 3(rr')^{-2} - 3^{-1})\,\cos(|r-r'|)$$

$$+(-r^{-2} - r'^{-2} - 3(rr')^{-1} + 3(rr')^{-2} + 3^{-1})\,\cos(r+r')\Big),$$

$$\frac{d}{dr'}\Sigma_2^{(\Lambda^{00})}(r,r';\beta) = \frac{1}{2}\Big(\sin(r+r')\,(3r^{-1} + 3r'^{-1} - 9r^{-2}r'^{-1} - 18r^{-1}r'^{-2} - 6r'^{-3} + 18r^{-2}r'^{-3})$$

$$+\cos(r+r')\,(-1 + 3r^{-2} + 6r'^{-2} + 9(rr')^{-1} - 18r^{-1}r'^{-3} - 18(rr')^{-2})$$

$$+\sin(|r-r'|)\,(6r'^{-3} - 9r^{-1}r'^{-2} - 18r^{-2}r'^{-3} - \mathrm{sgn}(r-r')\,|r-r'|)$$

$$+\cos(|r-r'|)\,(|r-r'|\,(3r^{-1}r'^{-2} + 18r^{-2}r'^{-3}) \qquad \text{A.3.17}$$

$$+\mathrm{sgn}(r-r')\,(-1 + 3r^{-2} + 3r'^{-2} - 6(rr')^{-1}))\Big),$$

(*) Zur Bildung der ersten- und zweiten Ableitungen des $\Lambda^{(00)}$-Propagators bezüglich der Variablen r' im Fall $\beta>0$ ist es notwendig, die Ausdrücke aus (4.2.12-17) mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen in eine bezüglich der Variablen $r_>$ und $r_<$ symmetrische Darstellung zu bringen. Der Kürze halber geben wir nur den auf diese Weise umgeschriebenen $\Lambda_{L=2}(r,r';\beta)$-Propagator von (4.2.16) bzw. (4.2.17) an.

$$\frac{d}{dr'}\,\Pi_2^{(\Lambda^{\infty})}(r, r'; \beta) = \frac{3}{2}\Big(\sin(\varphi-\varphi')\,\big(|\varphi-\varphi'|\,(\varphi^{-1}\varphi'^{-2} + 6\,\varphi^{-2}\varphi'^{-3}) + \sigma(\varphi-\varphi')\,\big((\varphi'-\varphi)^2(\varphi\varphi')^{-2} - 3$$

$$+ \cos(|\varphi-\varphi'|)\,\big(-2\,\varphi'^{-3} + 3\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} + 6\,\varphi^{2}\varphi'^{-3} + \sigma(\varphi-\varphi')\,|\varphi-\varphi'|\,((\varphi\varphi')^{-1} + 3(\varphi\varphi')^{-2})\big) \qquad \text{A.3.18}$$

$$+ \sin(\varphi+\varphi')\,\big((\varphi\varphi')^{-2}(2\varphi^2 - 6\varphi\varphi'^{-1} - 6 + \varphi'^{-2} + 3\varphi\varphi') - 3^{-1}\big)$$

$$+ \cos(\varphi+\varphi')\,\big(-\varphi'^{-1} - \varphi^{-1} + 3\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} + 3\,\varphi^{-2}\varphi'^{-1} + 2\,\varphi'^{-3} + 3\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} - 6\varphi^{-2}\varphi'$$

$$\frac{d^2}{dr'^2}\,\Sigma_2^{(\Lambda^{\infty})}(r, r'; \beta) = \frac{w}{2}\Big(\cos(\varphi+\varphi')\,\big(\Xi_1(\varphi,\varphi') - 9\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} - 12\,\varphi'^{-3} + 36\,\varphi^{-2}\varphi'^{-3} + 54\,\varphi^{-1}\varphi'^{-4}\big)$$

$$+ \sin(\varphi+\varphi')\,\big(36\,\varphi^{-1}\varphi'^{-3} + 18\,\varphi'^{-4} - 54\,\varphi^{-2}\varphi'^{-4} - 3\,\varphi'^{-2} + 9(\varphi\varphi')^{-2} - \Xi_2(\varphi,\varphi')\big) \qquad \text{A.3.19}$$

$$+ \cos(|\varphi-\varphi'|)\,\big(|\varphi-\varphi'|\,\Xi_3(\varphi,\varphi') - \operatorname{sgn}(\varphi-\varphi')\,\Xi_4(\varphi,\varphi') + \operatorname{sgn}(\varphi-\varphi')\,(6\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} - 6\,\varphi'^{-3} - \Xi_5(\varphi,\varphi')) - |\varphi-\varphi'|\,(6\,\varphi^{-1}\varphi'^{-3} + 54\,\varphi^{-2}\varphi'^{-4})\big)$$

$$+ \sin(|\varphi-\varphi'|)\,\big(-18\,\varphi'^{-4} + 18\,\varphi^{-1}\varphi'^{-3} + 54\,\varphi^{-2}\varphi'^{-4} + \Xi_3(\varphi,\varphi') + 2\operatorname{sgn}(\varphi-\varphi')\,|\varphi-\varphi'|\,\Xi_5(\varphi,\varphi') + \Xi_6(\varphi,\varphi')\big)\Big)$$

$$+ \delta(r-r'),$$

$$\Xi_1(\varphi,\varphi') := 3\,\varphi^{-1} + 3\,\varphi'^{-1} - 9\,\varphi^{-2}\varphi'^{-1} - 18\,\varphi^{-1}\varphi'^{-2} - 6\,\varphi'^{-3} + 18\,\varphi^{-2}\varphi'^{-3},$$

$$\Xi_2(\varphi,\varphi') := -1 + 3\,\varphi^{-2} + 6\,\varphi'^{-2} + 9(\varphi\varphi')^{-1} - 18\,\varphi^{-1}\varphi'^{-3} - 18(\varphi\varphi')^{-2},$$

$$\Xi_3(\varphi,\varphi') := 3(\varphi\varphi')^{-1}\,(1 + 3(\varphi\varphi')^{-1}), \qquad \text{A.3.20-22}$$

$$\Xi_4(\varphi,\varphi') := 3\varphi'^{-2}\left(2\varphi'^{-1} - 3\varphi^{-1} - 6\varphi^{-2}\varphi'^{-1}\right), \qquad \text{A.3.23}$$

$$\Xi_5(\varphi,\varphi') := 3\varphi^{-1}\varphi'^{-2}\left(1 + 6(\varphi\varphi')^{-1}\right), \qquad \text{A.3.24}$$

$$\Xi_6(\varphi,\varphi') := -1 + 3\varphi^{-2} + 3\varphi'^{-2} - 6(\varphi\varphi')^{-1}, \qquad \text{A.3.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\tau'^2}\,\overset{(\Lambda^{00})}{\Pi_2}(\tau,\tau';\beta) = \frac{3\omega}{2}\Big(&\sin(|\varphi-\varphi'|)\Big(|\varphi-\varphi'|\;\varphi^{-2}\varphi'^{-4}(\varphi\varphi'^3 + 3\varphi'^2 - 2\varphi\varphi' - 18) \\
&+ 4\,\mathrm{sgn}(\varphi-\varphi')\;\varphi^{-1}\varphi'^{-3}(\varphi'-\varphi) \qquad \text{A.3.26} \\
&+ \cos(|\varphi-\varphi'|)\Big(-2|\varphi-\varphi'|\;\mathrm{sgn}(\varphi-\varphi')(\varphi\varphi'+6)\;\varphi^{-2}\varphi'^{-3} + 3^{-1} \\
&+ \varphi^{-2}\varphi'^{-4}(-18 - 6\varphi\varphi' + 6\varphi^2 - 3\varphi'^2 + \varphi\varphi'^3 \\
&- \varphi^2\varphi'^2 - \varphi'^4)\Big) \\
&+ \sin(\varphi+\varphi')\,\varphi^{-1}\varphi'^{-4}\Big(18 - 6\varphi\varphi' + 18\varphi^{-1}\varphi' - 9\varphi'^2 + \varphi\varphi'^3 + \varphi'^4 \\
&- 3\varphi^{-1}\varphi'^3\Big) \\
&+ \cos(\varphi+\varphi')\Big(-3^{-1} + \varphi^{-2}\varphi'^{-4}\big(18 + 3\varphi^2\varphi'^2 - 18\varphi\varphi' - 9\varphi'^2 \\
&+ \varphi'^4 + 3\varphi\varphi'^3 - 6\varphi^2\big)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

A.4 Restabschätzung der $\Lambda^{(10)}$-Propagatorintegrale.

$$\varkappa := 10\, k_F, \quad \varrho := \varkappa r, \quad \varrho' := \varkappa r', \qquad \text{A.4.1}$$

$$R^{\alpha}_{L=0}(r \neq r'; \varkappa) = 2\varkappa(\varrho\varrho')^{-1}\left(X_1^-(r, r'; \varkappa) - X_1^+(r, r'; \varkappa)\right), \qquad \text{A.4.2}$$

$$R^{\alpha}_{L=0}(r = r'; \varkappa) = \varkappa\left(2^{-1}\varrho^{-2}(1 - \cos(2\varrho)) + \varrho^{-1}\left(\tfrac{\pi}{2} - Si(2\varrho)\right)\right)^{(*)}, \qquad \text{A.4.3}$$

$$R^{\alpha}_{L=1}(r, r'; \varkappa) = \varkappa(2\varrho\varrho')^{-1}\Big(X_1^-(r, r'; \varkappa) + X_1^+(r, r'; \varkappa) \qquad \text{A.4.4}$$

$$+ (2\varrho\varrho')^{-1}\left((\varrho - \varrho')\, X_2^-(r, r'; \varkappa) - (\varrho + \varrho')\, X_2^+(r, r'; \varkappa)\right)$$

$$+ (3\varrho\varrho')^{-1}\Big(\cos(\varrho - \varrho') - 2^{-1}(\varrho - \varrho')\, X_2^-(r, r'; \varkappa)$$

$$- \cos(\varrho + \varrho') + 2^{-1}(\varrho + \varrho')\, X_2^+(r, r'; \varkappa)\Big)\Big),$$

$$R^{\alpha}_{L=1}(r = r'; \varkappa) = \varkappa\Big((2\varrho^2)^{-1} + (1 + \cos(2\varrho))(6\varrho^4)^{-1} - (3\varrho^3)^{-1}\sin(2\varrho)$$

$$-(3\varrho)^{-1}\left((2\varrho)^{-1}\cos(2\varrho) - \left(\tfrac{\pi}{2} - Si(2\varrho)\right)\right)\Big), \qquad \text{A.4.5}$$

(*) Si = Integralsinus (AS68).

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha}_{L=2}(r,r';\varkappa) = {} & 3^{-1}\varkappa\Big(\big(9(2\varphi^2\varphi'^2)^{-1} - 3(2\varphi^3\varphi'^3)^{-1}(\varphi^2+\varphi'^2)\big)\, X_3^-(r,r';\varkappa) \\
& + \big(9(2\varphi^2\varphi'^2)^{-1} + 3(2\varphi^3\varphi'^3)^{-1}(\varphi^2+\varphi'^2)\big)\, X_3^+(r,r';\varkappa) \\
& + 3\varkappa(2\varphi^2\varphi'^2)^{-1}\big(2^{-1}(\varphi+\varphi')\, X_2^+(r,r';\varkappa) \\
& \qquad - (\varphi-\varphi')\, X_2^-(r,r';\varkappa)\big) \\
& + 3(\varphi\varphi')^{-1}\big(5^{-1}(X_5^-(r,r';\varkappa) - X_5^+(r,r';\varkappa)) \\
& \qquad + 4^{-1}\big((\varphi-\varphi')\, X_4^-(r,r';\varkappa) - (\varphi+\varphi')\, X_4^+(r,r';\varkappa)\big)\big)\Big) \\
& + \varkappa(2\varphi\varphi')^{-1}\big(X_1^-(r,r';\varkappa) - X_1^+(r,r';\varkappa)\big),
\end{aligned}
\tag{A.4.6}
$$

$$
X_1^{\mp}(r,r';\varkappa) := \cos(\varphi\mp\varphi') - (\varphi\mp\varphi')\,\mathrm{sgn}(\varphi\mp\varphi')\left(\tfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(\varphi\mp\varphi')\right), \tag{A.4.7}
$$

$$
X_2^{\mp}(r,r';\varkappa) := \sin(\varphi\mp\varphi') + (\varphi\mp\varphi')\, X_1^{\mp}(r,r';\varkappa), \tag{A.4.8}
$$

$$
X_3^{\mp}(r,r';\varkappa) := \cos(\varphi\mp\varphi') - 2^{-1}(\varphi\mp\varphi')\, X_2^{\mp}(r,r';\varkappa), \tag{A.4.9}
$$

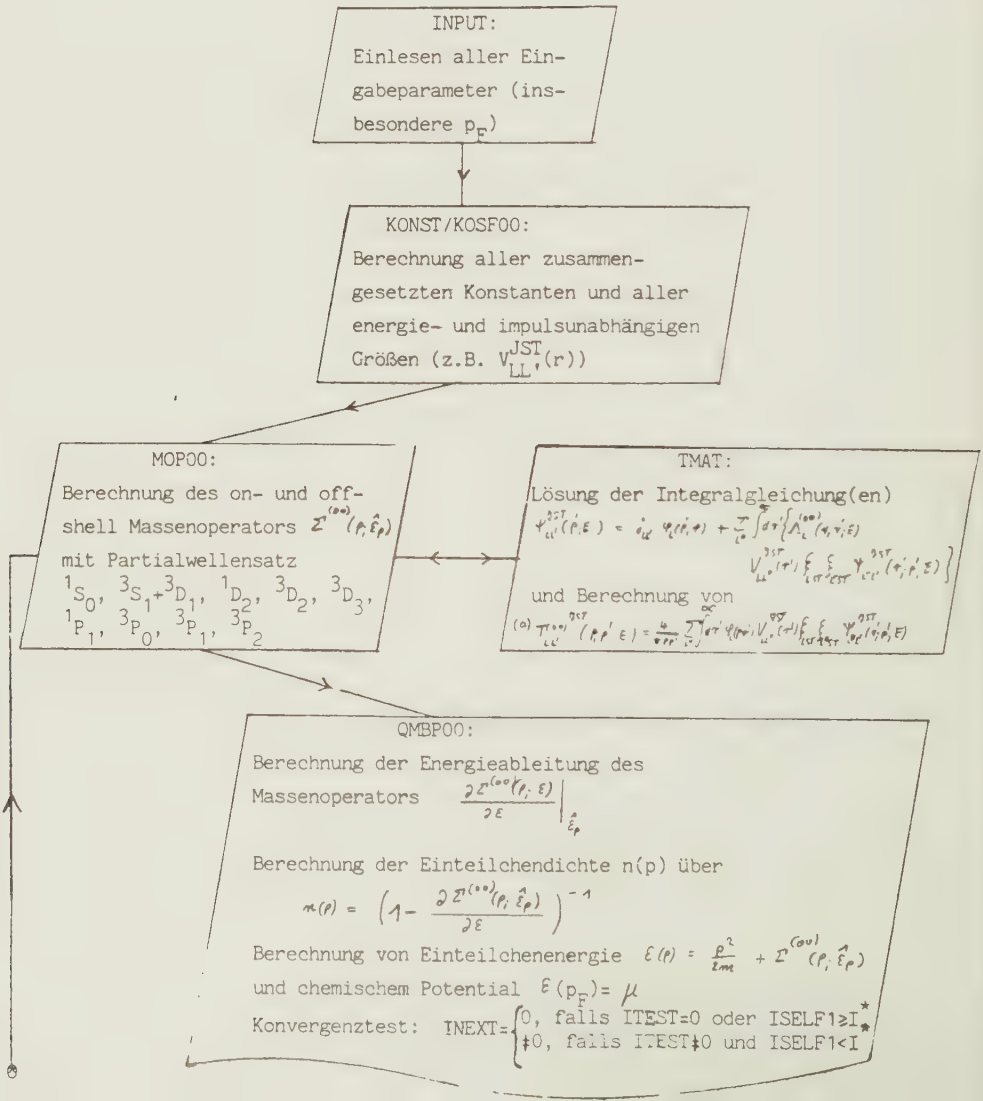
$$
X_4^{\mp}(r,r';\varkappa) := \sin(\varphi\mp\varphi') + 3^{-1}(\varphi\mp\varphi')\, X_3^{\mp}(r,r';\varkappa), \tag{A.4.10}
$$

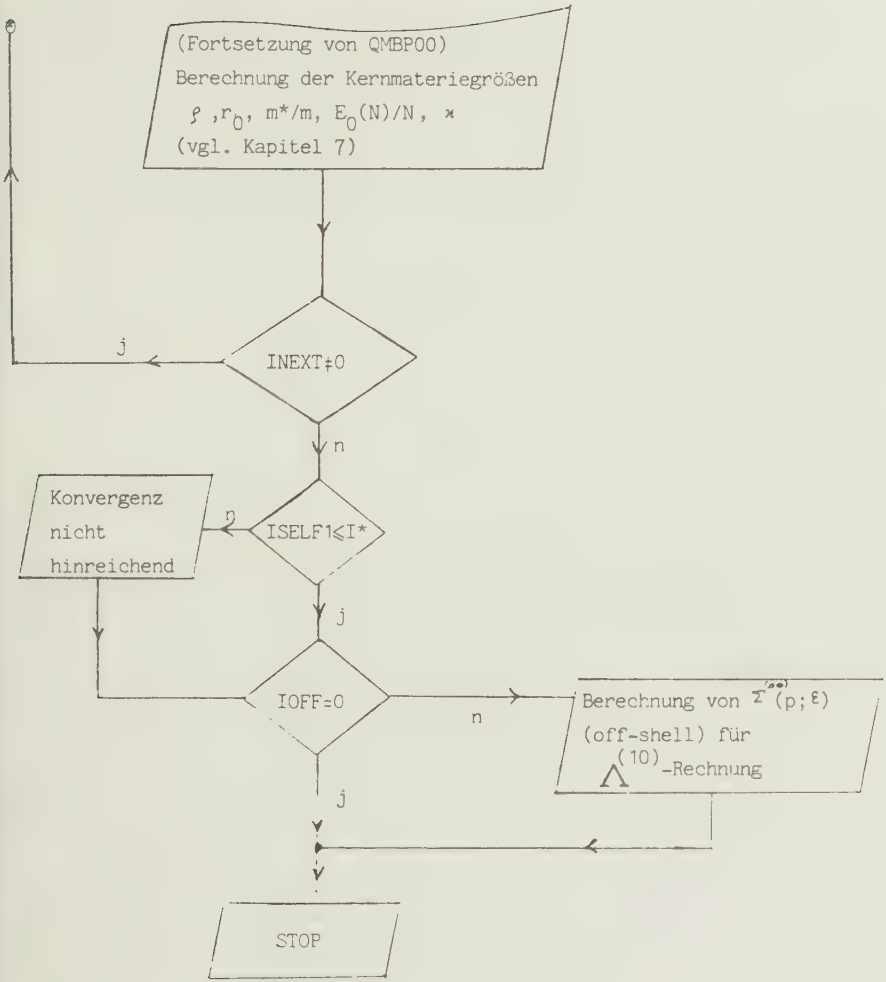
$$
X_5^{\mp}(r,r';\varkappa) := \cos(\varphi\mp\varphi') - 4^{-1}(\varphi\mp\varphi')\, X_4^{\mp}(r,r';\varkappa). \tag{A.4.11}
$$

A.5 $\Lambda^{(ij)}$-Computerprogramme.

A.5.1 $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Programm.

Ablaufdiagramm zur selbstkonsistenten Lösung der $\Lambda^{(00)}$-Gleichungen.




(Fortsetzung von QMBP00)
Berechnung der Kernmateriegrößen
ρ, r_0, m*/m, $E_0(N)/N$, $\varkappa$
(vgl. Kapitel 7)
INEXT≠0
j
n
ISELF1≤I*
n
Konvergenz nicht hinreichend
j
IOFF=0
n
Berechnung von $\Sigma^{(\infty)}(p;\varepsilon)$ (off-shell) für $\Lambda^{(10)}$-Rechnung
j
STOP

Ablaufdiagramm zur selbstkonsistenten Lösung der $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen.

Da der Rechenablauf zur Lösung der $\Lambda^{(10)}$-Gleichungen dem der $\Lambda^{(00)}$-Gleichungen ähnlich ist, verzichten wir auf die Angabe des Ablaufdiagramms.

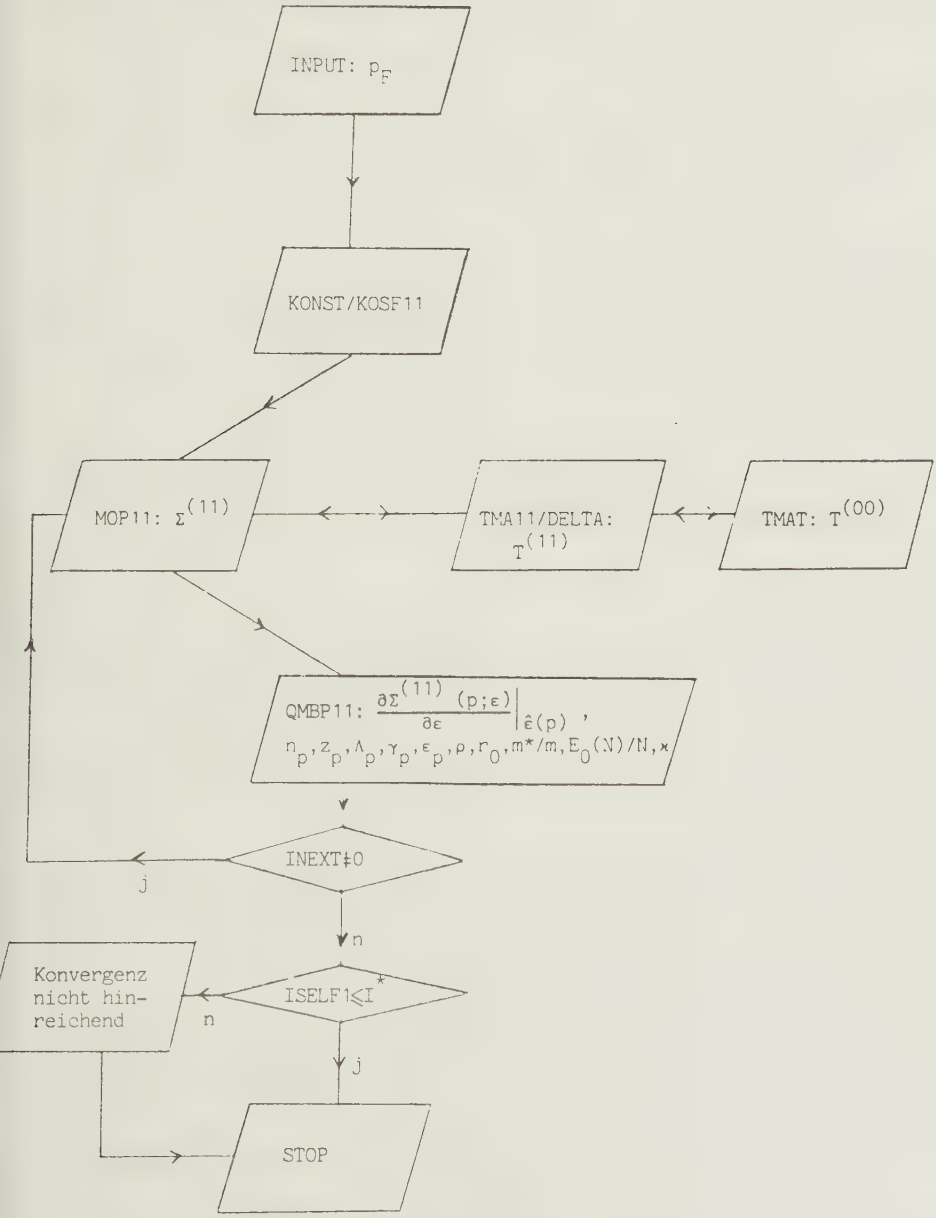
Unter Beachtung der folgenden Änderungen kann wie oben verfahren werden:

i) Der Propagator $\Lambda^{(00)}$ ist durch $\Lambda^{(10)}$ zu ersetzen,

ii) $\Lambda^{(10)}(r,r';\beta)$ ist mit numerischen Methoden zu berechnen (s. 7.1); dazu ist

iii) $\Sigma^{(off)}(p;\varepsilon)$ aus einer konvergenten $\Lambda^{(00)}$-Rechnung bzw. vom (I-1)ten $\Lambda^{(10)}$-Iterationsschritt zu verwenden. In den erstellten Programmen wird $\Sigma^{(off)}(p;\varepsilon)$ im ersten Schritt in "KOSF10" für verschiedene Parameterwerte ε als Funktion von p durch kubische Splines approximiert. Für die Funktion n(p) bietet sich dabei eine parabolische Interpolation an. Sowohl $\Sigma^{(off)}(p;\varepsilon)$ als auch n(p) werden im Form eindimensionaler Felder nach "MOP10" übergeben. Im Anschluß an die Subroutine "QMB10" kann $\Sigma^{(off)}(p;\varepsilon)$ mit dem neu berechneten Dichteverlauf der Einteilchenzustände n(p) für den nächsten Iterationsschritt der $\Lambda^{(10)}$-Rechnung berechnet werden. Die Splineapproximation für $\Sigma^{(off)}(p;\varepsilon)$ und die parabolische Interpolation von n(p) erfolgt für alle weiteren Iterationsschritte in der Subroutine "MOP10".

A.5.2 $\Lambda^{(11)}$-Programm.



Beschreibung der Unterprogramme der $\Lambda^{(11)}$-Routine:

INPUT:

-Einlesen aller Eingabedaten (insbesondere Fermiimpuls p_F).

KONST/KOSF11:

-Berechnung aller zusammengesetzten Konstanten.

-Berechnung der energie- und impulsunabhängigen Größen (z.B. $V_{LL'}^{JST}(r)$)

-Belegung von Arbeitsfeldern (z.B. ε_p, $\hat{\varepsilon}_p$, z_p, n_p, Λ_p, γ_p) mit Startwerten.

-Belegung von Arbeitsfeldern mit Stützstellen für die Energie-, Impuls- und Raumwinkelintegrationen.

MOP11:

-Berechnung des on- und off-shell Massenoperators $\Sigma^{(11)}(p;\hat{\varepsilon}(p)) = \Sigma^{(\Sigma)}(p;\hat{\varepsilon}(p)) + i\,\Pi^{(\Sigma)}(p;\hat{\varepsilon}(p))$ mit dem Partialwellensatz ${}^1S_0$, ${}^3S_1+{}^3D_1$, ${}^1D_2$, ${}^3D_2$, ${}^3D_3$; ${}^1P_1$, ${}^3P_0$, ${}^3P_1$, ${}^3P_2$.

-Je nach Parameterbelegung (IIM,IJM) wird berechnet (vgl. mit Kapitel 7):

IIM	IJM	
0	0	$\sum_{JSTL} \int d^3\vec{p}_2\, \bar{\xi}_{LST} \left(\Sigma^{(T)}_{\lvert\vec{p}\rvert} \left(\frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \hat{\varepsilon}_{p_1}+\hat{\varepsilon}_{p_2} \right) \right)_{LL}^{JST}$ (*)
1	0	$\sum_{JSTL} \int_{q_{min}}^{p_F} d^3\vec{p}_2\, \bar{\xi}_{LST} \left(\Pi^{(T)}_{\lvert\vec{p}\rvert} \left(\frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \hat{\varepsilon}_{p_1}+\hat{\varepsilon}_{p_2} \right) \right)_{LL}^{JST}$
1	1	$\frac{1}{\pi} \sum_{JSTL} \int d^3\vec{p}_2 \int_{-\infty}^{0} d\varepsilon'\, \bar{\xi}_{LST} \left(\Pi^{(T)}_{\lvert\vec{p}\rvert} \left(\frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}; \varepsilon' \right) \right)_{LL}^{JST} \Sigma^{(G^{(M)})}(p_2, \varepsilon'-\varepsilon+i0)$
3	1	$\Sigma(\bar{p};\hat{\varepsilon}_{\bar{p}}) = \sum_{JSTL} \int d^3\vec{p}_2\, \bar{\xi}_{LST} \left(\Sigma^{(T)}_{\lvert\vec{p}\rvert} \left(\frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}, \frac{\lvert\vec{p}_1-\vec{p}_2\rvert}{2}; \hat{\varepsilon}_{\bar{p}}+\hat{\varepsilon}_{p_2} \right) \right)_{LL}^{JST}$.

TMA11/DELTA:

-Berechnung von ${}^{(a)}T_{LL}^{(11)JST}(p,p;E) = \Sigma_{LL}^{(T)JST}(p,p;E) + i\,\Pi_{LL}^{(T)JST}(p,p;E)$ via

---

(*) $\bar{\xi}_{LST}$ ist auf Seite 130 definiert.

$$
{}^{(a)}T_{ll}^{(11)\,\eta ST}(p,p;E) = {}^{(0)}T_{ll}^{(00)\,\eta ST}\left(p,p;E-\frac{p^2}{4m}+2\mu\right)
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{l''}\int d^3\vec{q}\;{}^{(a)}T_{ll''}^{(00)\,\eta ST}\left(p,q;E-\frac{p^2}{4m}+2\mu\right)\left(\begin{Bmatrix}\Lambda_{\ell}^{(11)}(q;E)\\ \Lambda_{\ell}^{(6)}(q,E)\end{Bmatrix}-\Lambda_{\ell}^{(00)}(q;E)\right)
$$

$$
\xi_{l''ST}\;T_{ll}^{(00)\,\eta ST}\left(q,p;E-\frac{p^2}{4m}+2\mu\right).
$$

TMAT:

-Lösung der Integralgleichung(en)

$$
\psi_{ll'}^{\eta ST}(r,p';\beta) = \delta_{ll'}\;\varphi_l(pr) + \sum_{l''}\int_0^\infty dr'\;\Lambda_l^{(00)}(r,r';\beta)\;V_{ll''}^{\eta ST}(r')\;\xi_{lST}\;\xi_{l''ST}\;\psi_{l''l'}^{\eta ST}(r',p';\beta)
$$

und Berechnung von

$$
{}^{(a)}T_{ll'}^{(00)\,\eta ST}(p,p';\beta) = \frac{4}{\pi pp'}\sum_{l''}\int_0^\infty dr'\;\varphi_l(pr')\;V_{ll''}^{\eta ST}(r')\;\xi_{lST}\;\xi_{l''ST}\;\psi_{l''l'}^{\eta ST}(r',p';\beta).
$$

QMBP11:

-Berechnung von $z(p)=\left(1-\frac{\partial\Sigma}{\partial\varepsilon}(p;\varepsilon)\Big|_{\varepsilon_p-\mu}\right)^{-1}$, $\gamma(p)=-2\,\pi^{(\Sigma)}(p;\varepsilon_p-\mu)$,

$\alpha(p)=z(p)\;\gamma(p)/2$,

$\Lambda(p)=2(\bar{\nu}-z(p))\;z(p)^{-1}$,

$n(p)=(7.2.27)$,

$\varepsilon(p)$, $\hat{\varepsilon}(p)$, $\varepsilon(p_F)=\mu$.

-Berechnung der Kernmateriegrößen ρ, r_0, m^*/m, $E_0(N)/N$, $\varkappa$.

-Konvergenztest wie in den $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Programmen aus A.5.1.

A.6 Programmanforderungen auf den CYBER A/B Computern.

Potential	$\Lambda^{(ij)}$-Methode	Speicherbedarf in CM-WDS(*)	Übersetzungszeit des Compilers (OPT=2) in Sekunden	Rechenzeit/ Iteration in Sekunden	SRU-Verbrauch
RSC	(00)	135000	12.9	302(**)	380(**)
PAR	(00)	135000	12.	1600	1990
HJ	(00)	114000	11.1	644	795
RSC(***)	(10)	125000	8.4	4690	5680
HJ	(10)	135000	9.8	6290	7722
RSC(*****)	(11)/(G)	150000	16./14.4	1283/506	1623/641
PAR	(11)/(G)	150000	16./16.8	5690/812	6815/1030
HJ	(11)/(G)	130000	14./14.	3300/480	4050/590

(*) Für Details sei auf die Manuals des Leibnitz-Rechenzentrums verwiesen.

(**) In den Angaben ist die Berechnung der off-shell Selbstenergie (Startwerte für $\Lambda^{(10)}$) enthalten.

(***) $^{M}\Lambda^{(10)}_{HJ}$- und $^{M}\Lambda^{(10)}_{RSC}$- Version.

(*****) $\Lambda^{(G)}$ steht für die Lösung der Kernmateriegleichungen bei Verwendung des Galitskii-Propagators.

A.7 Abkürzungsverzeichnis.

Symbol	Bedeutung
SE	Singlet Even
TE	Triplet Even
SO	Singlet Odd
TO	Triplet Odd
SC	Soft-Core
HC	Hard-Core
HJ	Hamada-Johnston (-Potential)
RSC	Reid-Soft-Core (-Potential)
PAR	Paris-Nukleon-Nukleon (-Potential)
OPEP	One-Pion-Exchange-Potential
LR	long- range (-Anteil einer Wechselwirkung)
MR	medium-range (-Anteil einer Wechselwirkung)
HPW	höhere Partialwellen
OSG	off-shell Schrödinger-Gleichung
OLS	off-shell Lippmann-Schwinger Gleichung
ODGL	off-shell Differentialgleichung
OIGL	off-shell Integralgleichung
SO	Spin-Bahn (-Term)
SO2	quadratischer Spin-Bahn (-Term)
$^{2S+1}L_J$	Spektroskopische Schreibweise der Quantenzahlen des Zwei-Nukleonen-Streuproblems
$A^{JST}_{LL'}$	Entwicklungskoeffinzient des Operators A bei Multipolentwicklung, $A \in \{\Omega, \Psi, T^{(ij)}, V, \Lambda^{(ij)}\}$
$M_{\Lambda}^{(10)}$	Modifizierte $\Lambda^{(10)}$-Version (s. (4.3.27))
$\Lambda^{(ij)}_{WW}$	$\Lambda^{(ij)}$-Rechnung mit Potential WW
$\Sigma^{(A)}$	Re(A), $A \in \{\Omega, \Psi, T, \Sigma, \hat{\Phi}, \Lambda, \hat{\Lambda}\}$
$\Pi^{(A)}$	Im(A)

A.8 Überblick über die theoretischen Methoden zur Behandlung des quantenmechanischen Vielteilchenproblems(*).

A.8.1 Brueckner-Bethe-Goldstone (BBG)-Entwicklung.

Die BBG-Theorie wurde ausführlich von Day (DA67,DA68), Bethe (BE71) Sprung (SP72) und Mahaux (MA81) beschrieben. Sie basiert auf der "Linked-Cluster" Entwicklung der Grundzustandsenergie $E(\rho)$ von Goldstone (GO57). Der Hamiltonoperator H ist in zwei Anteile H_0 und H_1 aufgespalten:

$$H_0 = \sum_i \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + U(k_i) \right\} , \qquad \text{A.8.1.1}$$

$$H_1 = \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_i U(k_i) . \qquad \text{A.8.1.2}$$

Das Einteilchenpotential U wird so gewählt, daß die Störungsentwicklung für H_1 rasch konvergiert. Die singulären Matrixelemente der N-N-Wechselwirkung V in (A.8.1.2) sind durch die sog. "Reactionmatrix" G zu ersetzen, die der Integralgleichung

$$G = V - V \frac{Q}{e} G \qquad \text{A.8.1.3}$$

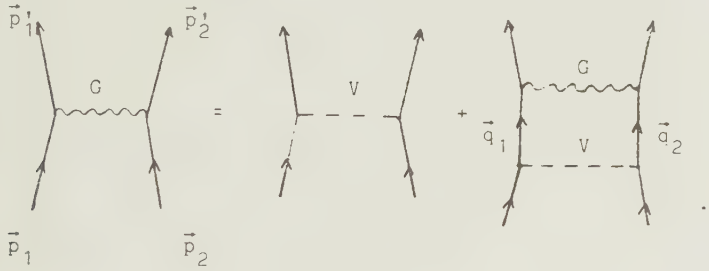
genügt. Q bezeichnet den Paulioperator, der nur Teilchenstreuung in intermediäre Zustände überhalb der Fermikante zuläßt. e ist der Energienenner.

Die nichtsinguläre G-Matrix summiert die sukzessive Wechselwir-

---

(*) Vgl. hierzu (DA78,PW79).

kung zwischen zwei streuenden Teilchen über alle Ordnungen in V:



Bezeichnet $|\phi\rangle$ die Wellenfunktion eines idealen Gases und $|\psi\rangle$ die Wellenfunktion des gestörten (wahren) Grundzustandes, so kann (A.8.1.3) mit Hilfe der Beziehung

$$G|\phi\rangle = V|\psi\rangle \qquad \text{A.8.1.4}$$

in die Bethe-Goldstone-Gleichung der exakten Zweiteilchen-Wellenfunktion

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle - \frac{Q}{e} V|\psi\rangle \qquad \text{A.8.1.5}$$

übergeführt werden.

Eine Störungsentwicklung nach Potenzen von G ist nicht konvergent. Man gruppiert statt dessen die Graphen der "Linked-Cluster" Entwicklung nach der Zahl der unabhängigen Lochlinien. Für Konvergenzfragen dieser "hole-line" Entwicklung sei auf Brandow (BR66) verwiesen. Maßgebend für die Konvergenz ist, wie bereits erwähnt, die Wahl des Einteilchenpotentials U. Man unterscheidet zwischen "standard choice" und "continuous choice". Im ersten Fall wird U=0 gesetzt für die Teilchenzustände ($k>k_F$), während für Lochzustände ($k<k_F$) U gleich dem selbstkonsistent berechneten

Hartree-Fock-Potential gesetzt wird. Die kontinuierliche Wahl des Einteilchenpotentials geht auf Jeukenne et al. (JLM75) zurück.

Bevor auf die Variationsmethode hingewiesen wird, sei noch die standard Hartree-Fock-Methode erwähnt. Diese berücksichtigt keinerlei dynamische Zweiteilchenkorrelationen - lediglich statistischen Effekten wird vermittels dem Pauliprinzip Rechnung getragen (IEA67,BR71,EG72). In einer Arbeit von J. Winter (WI78) wird das Schema der sog. Quasi-Hartree-Fock-Gleichungen angegeben, die diesen Umstand beseitigen und damit die Verwendung realistischerer N-N-Potentiale bei der Berechnung der Grundzustandsgrößen von Vielteilchensystemen gestatten (WE82,WWW83).

A.8.2 Jastrow-Theorie.

In der Jastrow-Theorie wählt man versuchsweise eine Vielteilchenwellenfunktion der Form

$$|\Psi_\eta\rangle = F\,|\Phi\rangle \,, \qquad \text{A.8.2.1}$$

$$F = \prod_{i<j} f_\eta(r_{ij}) \,. \qquad \text{A.8.2.2}$$

Der Zweiteilchen-Korrelationsoperator F wird aus Produkten der Korrelationsfunktionen f_J, die den Bedingungen

$$f_J(r_{ij}) \xrightarrow[r_{ij}\to 0]{} 0 \,, \qquad \text{A.8.2.3}$$

$$f_J(r_{ij}) \xrightarrow[r_{ij}\to \infty]{} 1 \qquad \text{A.8.2.4}$$

genügt, gebildet. $|\phi\rangle$ in (A.8.2.1) bezeichnet, wie im Fall der BBG-Theorie, die Wellenfunktion des wechselwirkungsfreien Fermigases. Für die Funktionen f_J wählt man einen Ansatz, der freie Parameter enthält, die solange variiert werden, bis die Variationsenergie

$$E_J = \langle \Psi_J | H | \Psi_J \rangle \, (\langle \Psi_J | \Psi_J \rangle)^{-1} \qquad \text{A.8.2.5}$$

mit

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} V_{ij} \qquad \text{A.8.2.6}$$

ein Minimum annimmt. Dieser Wert $(E_J)_{Min}$ ist eine obere Grenze für die Bindungsenergie $E(\rho)$ des Vielteilchensystems zu vorgegebener Dichte ρ (DA78,PW79).

Ein Vorzug dieser Methode ist, daß, je nach Art der vorgegebenen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, Gleichung (A.8.2.5) mit der Methode der Monte-Carlo-Integration exakt gelöst werden kann(*).

(*) Die Methode der Monte-Carlo-Integration hat den Nachteil, daß sie sehr rechenzeitintensiv ist.

A.9 Anmerkungen zum Modell der Kernmaterie.

A.9.1 Kernmaterie in Leiternäherung.

Eine Reihe von physikalischen Eigenschaften machen das quantenmechanische Vielteilchenproblem, beschrieben durch das Modell der Kernmaterie, einer quantitativen Auswertung erst zugänglich. Dazu zählen z.B. die Translationsinvarianz des Systems bezüglich der Zeit- und Raumkoordinaten wie auch die Tatsache, daß die Reichweite der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und der mittlere Teilchenabstand in Kernmaterie ungefähr gleich groß sind. Das zweite Argument verliert bei Berücksichtigung der langreichweitigen Coulombkraft seine Gültigkeit. Nach Voraussetzung wird die Coulombwechselwirkung jedoch im Modell der Kernmaterie vernachlässigt. Die Partialaufsummation der Streumatrix Γ von Kapitel 2 in Form der Leitergraphen, die nur die simultanen Korrelationen zweier streuender Nukleonen berücksichtigen, wird in den Arbeiten von z.B. (BG57,BR58,PU61,PR66,FF71,FF72,GWW75,GW76) untersucht und mit gutem Erfolg bestätigt.
Ein weiteres Argument, daß die Leitergraphen bei der Beschreibung der Kernmaterie am wichtigsten sein sollen und von dem bisher noch nicht die Rede war, betrifft den Einfluß der Teilchen-Loch-Prozesse beim Streuvorgang. Der attraktive Anteil der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (langreichweitiger Ein-Pion-Austausch Anteil) läßt im wesentlichen nur Impulsüberträge zu, die kleiner als der Fermiimpuls sind. Deshalb verändert der langreichweitige Teil der Wechselwirkung die Eigenschaften der Kernmaterie gegenüber dem freien Fermigas nicht wesentlich. Auf die Wellenfunktion zweier korrelierter Nukleonen übertragen heißt dies, daß diese nur für kleine Re-

lativabstände gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall verändert ist (BG57,BG58,BR58,GWW58,WE64). Es wird daher vermutet, daß Teilchen-Loch-Prozesse nicht entscheidend bei der Berechnung der Kernmateriegrößen sind(*).

A.9.2 T- und S-Matrix in Kernmaterie.

Zur Berechnung der T-Streumatrix ist die Integralgleichung (2.3.3) (vgl. mit Leiternäherung der Streuamplitude Γ in Kapitel 2)

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 | T^{(ij)}(E) | \alpha_1' \alpha_2' \rangle = 2 \langle \alpha_1 \alpha_2 | V^{(0)} | \alpha_1' \alpha_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.1}$$

$$+ \sum_{\alpha_3} \sum_{\alpha_4} \langle \alpha_1 \alpha_2 | V^{(0)} | \alpha_3 \alpha_4 \rangle \; \Lambda^{(ij)}_{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_4}(E)$$

$$\langle \alpha_3 \alpha_4 | T^{(ij)}(E) | \alpha_1' \alpha_2' \rangle$$

zu lösen, die wir umformen in

$$\langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | T^{(ij)}(E) | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle = 2 \langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | V^{(0)} | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.2}$$

$$+ \oint_{\eta_3} d^3\vec{p}_3 \oint_{\eta_4} d^3\vec{p}_4 \; \langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | V^{(0)} | \vec{p}_3 \eta_3 \vec{p}_4 \eta_4 \rangle$$

$$\langle \vec{p}_3 \eta_3 \vec{p}_4 \eta_4 | \Lambda^{(ij)}(E) | \vec{p}_3 \eta_3 \vec{p}_4 \eta_4 \rangle$$

$$\langle \vec{p}_3 \eta_3 \vec{p}_4 \eta_4 | T^{(ij)}(E) | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle \, .$$

Im folgenden machen wir von der Translationsinvarianz Gebrauch, womit für Ein- und Zweiteilchenoperatoren in der Impulsbasis $(\vec{k}_i;\eta_i) \equiv (\vec{k}_i;\sigma_i,\tau_i) \equiv \alpha_i$ gilt:

$$\langle \vec{p}_1 \eta_1 | O^{(1)} | \vec{p}_1' \eta_1' \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1') \; \langle \vec{p}_1 \eta_1 | O^{(1)} | \vec{p}_1' \eta_1' \rangle \, , \qquad \text{A.9.2.3}$$

(*) Allerdings sind Korrekturen bei den Einteilchenenergien in der Nähe der Fermikante möglich (s. (WW71) und weiterreichende Referenzen dort).

$$\langle \vec{p}_1 \eta_1 \vec{p}_2 \eta_2 | \mathbb{O}^{(2)} | \vec{p}_1' \eta_1' \vec{p}_2' \eta_2' \rangle = \langle \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \eta_1 \eta_2 | \mathbb{O}^{(2)} | \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1' - \vec{p}_2'), \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \eta_1' \eta_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.4}$$

$$= \delta((\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')) \qquad \text{A.9.2.5}$$

$$\langle \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \eta_1 \eta_2 | \mathbb{O}^{(2)}_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2} | \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1' - \vec{p}_2'), \eta_1' \eta_2' \rangle .$$

Im nächsten Schritt führen wir Relativ- und Schwerpunktsimpulse

$$\vec{p} := \tfrac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad \vec{P} := \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad \text{A.9.2.6}$$

ein.

Damit findet man für die Streumatrix T in Kernmaterie

$$\langle \vec{p} \eta_1 \eta_2 | T^{(ij)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}' \eta_1' \eta_2' \rangle = 2 \langle \vec{p} \eta_1 \eta_2 | V^{(0)} | \vec{p}' \eta_1' \eta_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.7}$$

$$+ \sum_{\eta_1'' \eta_2''} \int d^3\vec{p}'' \langle \vec{p} \eta_1 \eta_2 | V^{(0)} | \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' \rangle$$

$$\langle \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' | \Lambda^{(ij)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' \rangle$$

$$\langle \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' | T^{(ij)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}' \eta_1' \eta_2' \rangle .$$

Der $\Lambda^{(11)}$-Propagator hat nach (3.2.1-3) die Gestalt

$$\langle \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' | \Lambda^{(11)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}'' \eta_1'' \eta_2'' \rangle = \frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon \, G^{(1)}_{\frac{\vec{P}}{2} + \vec{p}''}\left(\tfrac{E}{2} + \varepsilon\right) G^{(1)}_{\frac{\vec{P}}{2} - \vec{p}''}\left(\tfrac{E}{2} - \varepsilon\right) \qquad \text{A.9.2.8}$$

$$\equiv \Lambda^{(11)}_{\eta_1'' \eta_2''}\left(\tfrac{\vec{P}}{2} + \vec{p}'', \tfrac{\vec{P}}{2} - \vec{p}''; E\right) .$$

Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich, wenn der $\Lambda^{(11)}$-Propagator durch $\Lambda^{(00)} = G^0 G^0$ ersetzt wird. Diese Approximation führt den Namen "Puffsche $\Lambda^{(00)}$-Näherung" (PU61,RP63,PRW66) und hat bereits zu befriedigenden Resultaten für Bindungsenergien und

Dichten des Grundzustandes von Kernmaterie geführt(*). Für den $\Lambda^{(00)}$-Propagator schließt sich an (A.9.2.8) mit (2.1.22) bzw. (3.2.1-3)

A.9.2.9

$$\Lambda^{(00)}_{\eta''\eta_2''}\left(\frac{\vec{P}}{2}+\vec{p}'',\frac{\vec{P}}{2}-\vec{p}'';E\right) = \frac{i}{2\pi}\int d\varepsilon\; \overset{o}{G}_{\frac{\vec{P}}{2}+\vec{p}''}\left(\frac{E}{2}+\varepsilon\right)\; \overset{o}{G}_{\frac{\vec{P}}{2}-\vec{p}''}\left(\frac{E}{2}-\varepsilon\right)$$

an.

In den letzten beiden Gleichungen haben wir angedeutet, daß die Propagatoren $\Lambda^{(ij)}$ unabhängig von den Spin- und Isospinquantenzahlen η_i'' (i=1,2) sind, da die Kernmaterie im Grundzustand mit Gesamtspin S=0 und gleicher Protonen- und Neutronenzahl betrachtet wird. Für den $\Lambda^{(00)}$-Propagator (A.9.2.9) kann mithin (vgl. (3.3.1'))

A.9.2.10

$$\langle\vec{p}'|\Lambda^{(00)}_{\vec{P}}(E)|\vec{p}''\rangle = \frac{\theta\left(\left[\frac{1}{2}\vec{P}+\vec{p}''\right]^2-\mu\right)\;\theta\left(\left[\frac{1}{2}\vec{P}-\vec{p}''\right]^2-\mu\right)}{E+2\mu-\frac{\vec{P}^2}{4m}-\frac{\vec{p}''^2}{m}+i0} - \frac{\theta\left(\mu-\left[\frac{1}{2}\vec{P}+\vec{p}''\right]^2\right)\;\theta\left(\mu-\left[\frac{1}{2}\vec{P}-\vec{p}''\right]^2\right)}{E+2\mu-\frac{\vec{P}^2}{4m}-\frac{\vec{p}''^2}{m}-i0}$$

geschrieben werden(**).

An die Integralgleichung (A.9.2.7), die mit den obigen Anmerkungen die Form

---

(*) Die Ergebnisse in dieser Näherung sind jedoch thermodynamisch nicht konsistent; die Gleichheit von Fermienergie ε_F, Bindungsenergie E/N und chemischem Potential μ im thermodynamischen Gleichgewicht ist nicht exakt erfüllt. Dieses sog. Hugenholtz-van-Hove-Theorem (HV58) wird im Prinzip erst in der $\Lambda^{(11)}$-Näherung erfüllt.

(**) m=Nukleonenmasse.

$$\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, T^{(ij)}_{\vec{P}}(E) \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle = 2 \langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, V^{(a)} \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.11}$$

$$+ \sum_{\eta_1''\eta_2''} \int d^3\vec{p}\,'' \langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, V^{(a)} \,|\, \vec{p}\,''\eta_1''\eta_2'' \rangle$$

$$\Lambda^{(ij)}\left(\frac{\vec{P}}{2}+\vec{p}\,'', \frac{\vec{P}}{2}-\vec{p}\,'', E\right)$$

$$\langle \vec{p}\,''\eta_1''\eta_2'' \,|\, T^{(ij)}(E) \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle$$

annimmt, schließt sich damit für das selbstbindende System der Kernmaterie ($\mu<0$) für den $T^{(00)}$-Vertex(*)

$$\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, T^{(00)}_{\vec{P}}(E) \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle = 2 \langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, V^{(a)} \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle \qquad \text{A.9.2.12}$$

$$+ \sum_{\eta_1''} \sum_{\eta_2''} \int d^3\vec{p}\,'' \; \frac{\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 | V^{(a)} | \vec{p}\,''\eta_1''\eta_2'' \rangle \langle \vec{p}\,''\eta_1''\eta_2'' | T^{(00)}_{\vec{P}}(E) | \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle}{E + 2\mu - \frac{\vec{P}^2}{4m} - \frac{\vec{p}\,''^2}{m}}$$

an.

Der Vergleich mit der Streuamplitude zweier Nukleonen im Schwerpunktsystem zeigt, daß die $T^{(00)}$-Matrix gerade gleich der antisymmetrisierten Streuamplitude für Energien $\Omega=E+2\mu-(4m)^{-1}\vec{P}^2$ ist. Das umgebende Medium bedingt ein sog. "off-shell" Energieverhalten. Explizit findet man zwischen S- und T-Matrix den Zusammenhang (WW71)

$$\langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, S\left(E - \frac{\vec{P}^2}{4m} + 2\mu\right) | \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{p}\,\eta_1\eta_2 \,|\, T^{(00)}_{\vec{P}}(E) \,|\, \vec{p}\,'\eta_1'\eta_2' \rangle. \qquad \text{A.9.2.13}$$

Die Triplett-T-Matrix $T^{110}_{LL'}$ $(L,L' \in \{0,2\})$(**) besitzt für $\Omega=B_D$, der Bindungsenergie des Deuterons, eine Polstelle $(E=B_D+(4m)^{-1}\vec{P}^2-2\mu)$

$$\lim_{\nu\to 0} T^{110\,(00)}_{LL'}(\Omega = B_D - \nu) = -\infty, \qquad \text{A.9.2.14}$$

$$\lim_{\nu\to 0} T^{110\,(00)}_{LL'}(\Omega = B_D + \nu) = +\infty. \qquad \text{A.9.2.15}$$

(*) Erst für $E>2|\mu|$ wird die $T^{(00)}$-Matrix komplex.

(**) Die Multipolzerlegung der T-Matrix ist in den Kapiteln 4 und 6 beschrieben.

Abbildungsunterschriften.

In den folgenden Abbildungen bedeutet

_____ : Resultat mit $\Lambda^{(00)}$-Methode,

- - - - - : Resultat mit $\Lambda^{(10)}$-Methode,

-.-.-.-.- : Resultat mit $\Lambda^{(11)}$-Methode,

-..-..-.. : Resultat mit Λ-Methode im Fall des Galitskii-Propagators ($\Lambda^{(G)}$-Methode).

Abbildung 1. Verlauf der Einteilchenenergie $\varepsilon(p)$ und des effektiven Einteilchenpotentials $V(p) \equiv \Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ (on-shell Massenoperator) in Abhängigkeit des Impulses p im Fall der $\Lambda^{(00)}$- und $\Lambda^{(10)}$-Methode. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde das HJ-Potential verwendet. Am rechten Bildrand sind die Werte der chemischen Potentiale eingezeichnet. (Der Buchstabe M bei ${}^{M}\mu_{HJ}^{(10)}$ soll andeuten, daß der modifizierte $\Lambda^{(10)}$-Propagator (Kapitel 4) benutzt wurde.)

Abbildung 2. Verlauf der Einteilchendichte n(p) über p für Impulse unterhalb der Fermikante im Fall des HJ-Potentials. Zugrunde liegen die $\Lambda^{(00)}$-, $\Lambda^{(10)}$- und die $\Lambda^{(G)}$-Methode.

Abbildung 3. Einteilchenenergie und effektives Einteilchenpotential im Fall des RSC-Potentials.

Abbildung 4. Verlauf der Einteilchendichte im Fall des RSC-Potentials.

Abbildung 5. Einteilchenenergie und effektives Einteilchenpotential im Fall der PAR-Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung.

Abbildung 6. Einteilchendichte im Fall des PAR-Potentials.

Abbildung 7. Verlauf der Einteilchenenergien $\mathcal{E}(p)$ und der effektive Einteilchenpotentiale $\Sigma(p;\hat{\mathcal{E}}(p))$ im Fall der $\Lambda^{(G)}$-Methode. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen liegen die Potentiale HJ, RSC und PAR zugrunde.

Abbildung 8. Off-shell Massenoperator $\Sigma(p;\mathcal{E})$ ("$p\neq\mathcal{E}$") für Energien $\mathcal{E}_1$=-53 MeV und $\mathcal{E}_2$=-33 MeV bei Verwendung des HJ-Potentials.

Abbildung 9. Off-shell Massenoperator $\Sigma(p;\mathcal{E})$ für Energien $\mathcal{E}_1$=-51 M und $\mathcal{E}_2$=-35 MeV bei Verwendung des RSC-Potentials.

Abbildung 10. Impulsabhängigkeit ($0\ F^{-1}<p<15\ F^{-1}$) des off-shell Massenoperators zu vorgegebenen Energieparametern $\mathcal{E}_1$=-4.14 MeV und $\mathcal{E}_2$=-410 MeV im Fall des HJ-Potentials

Abbildung 11. Wie Abbildung 10 (bei Verwendung des RSC-Potentials).

Abbildung 12. Einzelne Partialwellenbeiträge ($^{2S+1}L_J$) zum effektiven Einteilchenpotential in Abhängigkeit des Impulses ($v(^{2S+1}L_J)=\Sigma_{LL}^{JST}(p;\hat{\mathcal{E}}(p))$). Als Zweiteilchenpotential wurde HJ benutzt. Zum Vergleich sind die Kurven der ^3P $^1S_0$- und $^3S_1+^3D_1$-Kanäle der $\Lambda^{(10)}$-Methode eingezeichne

Abbildung 13. Wie Abbildung 12 (bei Verwendung des RSC-Potentials). Im Vergleich zu HJ unterscheidet sich hier der Verlauf der $^3P_2$-Welle im Fall der $\Lambda^{(10)}$-Methode deutlich vom Verlauf der $\Lambda^{(00)}$-Approximation.

Abbildung 14. Wie Abbildung 12 (bei Verwendung der PAR-Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung). Im Unterschied zu oben sind die Kurven der $^1S_0$- und $^3S_1+^3D_1$-Kanäle im Fall der $\Lambda^{(11)}$-Methode und der $^3S_1+^3D_1$-Kanal im Fall der $\Lambda^{(G)}$-Methode eingezeichnet.

Abbildung 15. Einteilchenspektrum $\varepsilon(p)$, on-shell Massenoperator $\Sigma(p;\hat{\varepsilon}(p))$ und Breite der Einteilchenzustände $\gamma(p)$ im Fall des HJ-Potentials.

Abbildung 16. Wie Abbildung 15 (bei Verwendung des RSC-Potentials).

Abbildung 17. Wie Abbildung 15 (bei Verwendung des PAR-Potentials).

Abbildung 18. Vergleich der Bindungsenergien pro Nukleon $E_0(n)/N$ und chemischen Potentiale μ der $\Lambda^{(00)}$-, $\Lambda^{(10)}$-, $\Lambda^{(11)}$- und $\Lambda^{(G)}$-Approximationen. Zugrunde liegt das HJ-Potential.

Abbildung 19. Wie Abbildung 18 (bei Verwendung des RSC-Potentials).

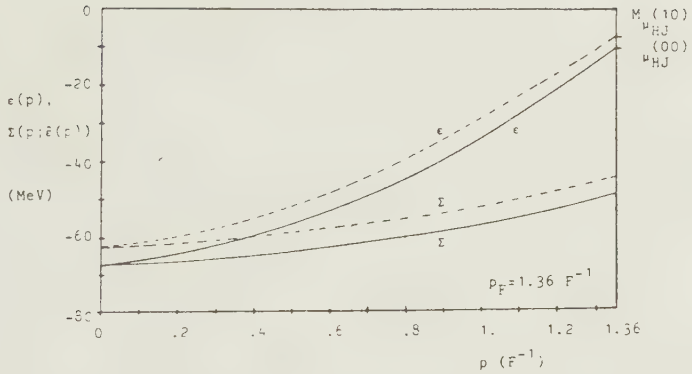
Abbildung 20. Wie Abbildung 18 (bei Verwendung des PAR-Potentials). Im Unterschied zu oben wurde die $\Lambda^{(10)}$-Methode nicht betrachtet.

Abbildung 21. Abhängigkeit der K- ($\tilde{m}/m$) und E-Masse ($\bar{m}/m$) vom Impuls p in der $\Lambda^{(11)}$-Näherung im Fall des HJ-Potentials.

Abbildung 22. Wie Abbildung 21 (bei Verwendung des RSC-Potentials).

Abbildung 23. Wie Abbildung 21 (bei Verwendung des PAR-Potentials).

Abbildung 1.



(Abbildungsunterschriften s. S. 215ff)

Abbildung 2.

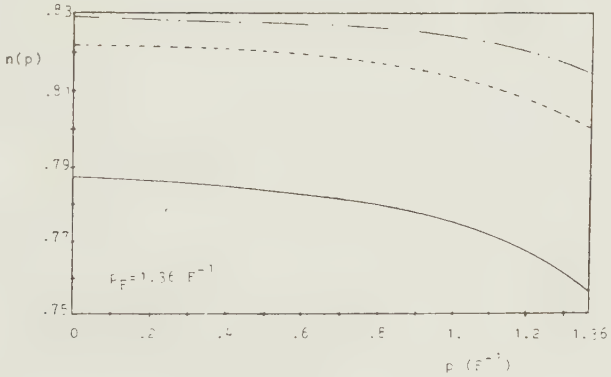


Abbildung 3.

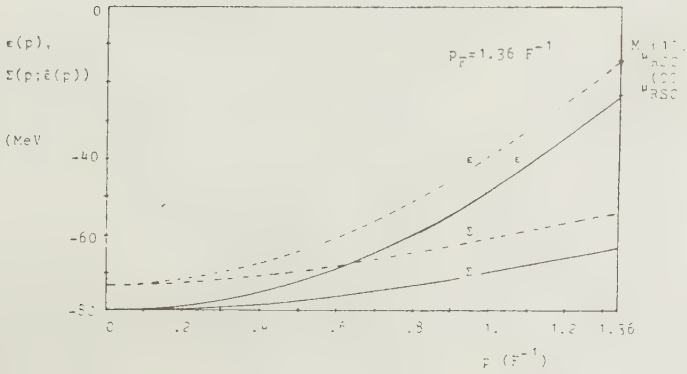
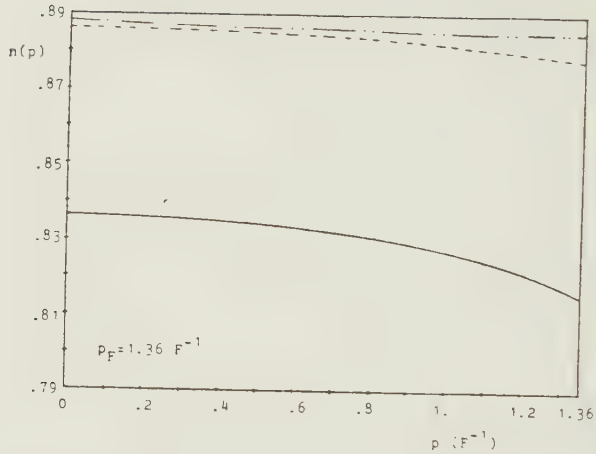


Abbildung 4.



(Abbildungsunterschriften s. S. 215ff)

Abbildung 5.

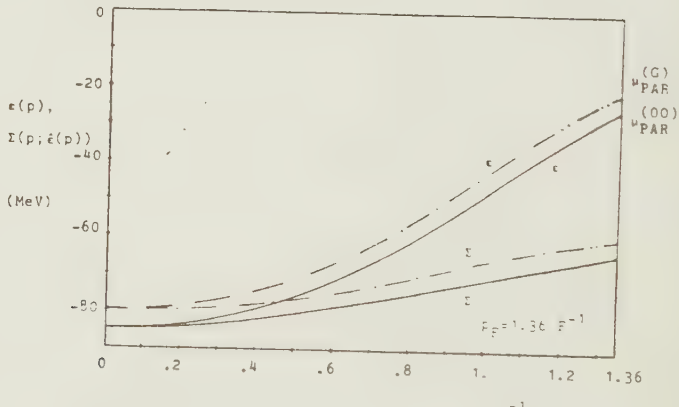


Abbildung 6.

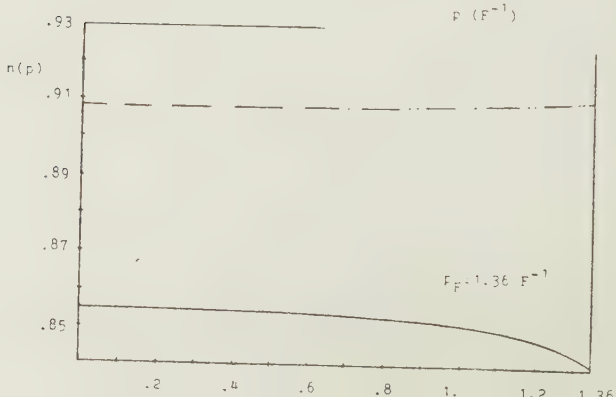
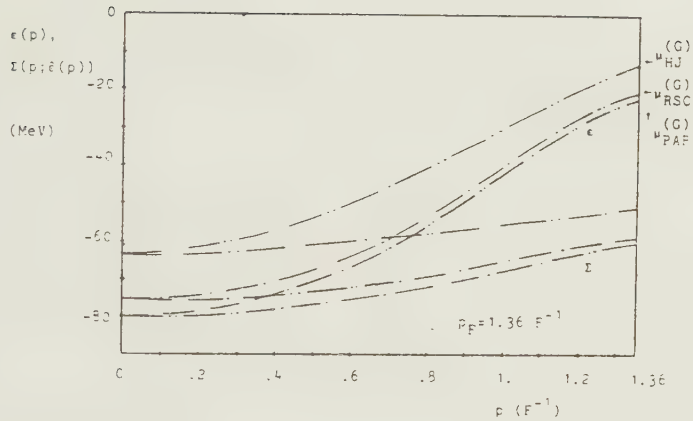


Abbildung 7.



(Abbildungsunterschriften s. S. 216ff)

Abbildung 8.

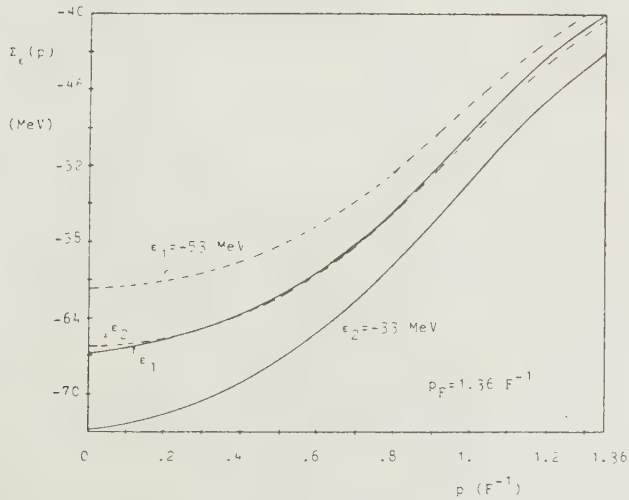
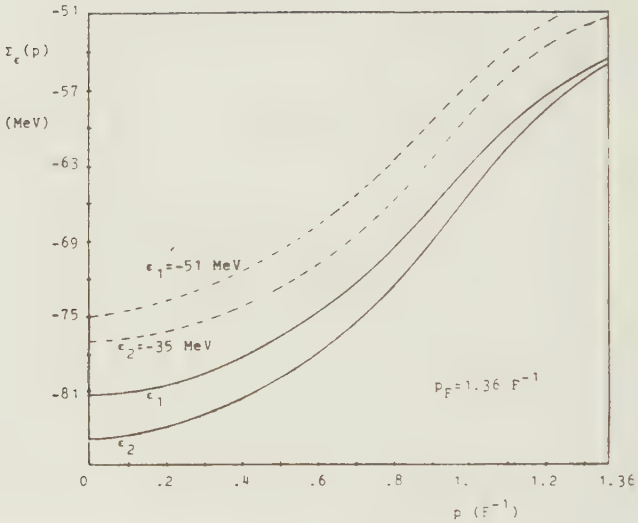


Abbildung 9.



(Abbildungsunterschriften s. S. 216ff)

Abbildung 10.

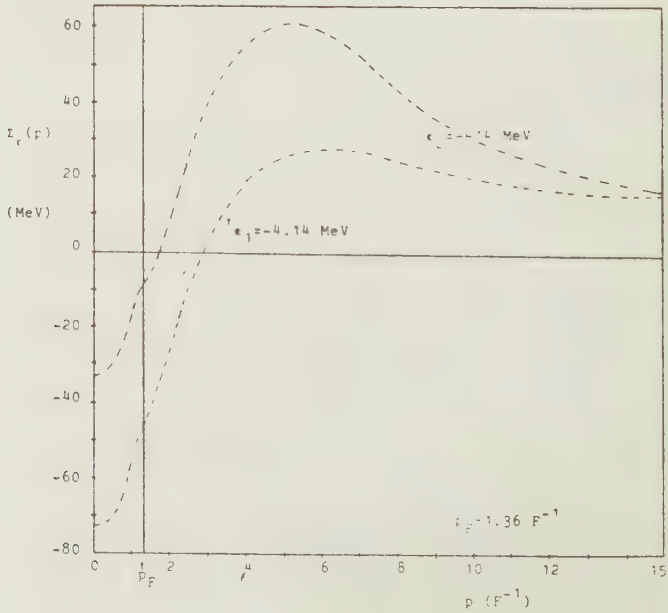
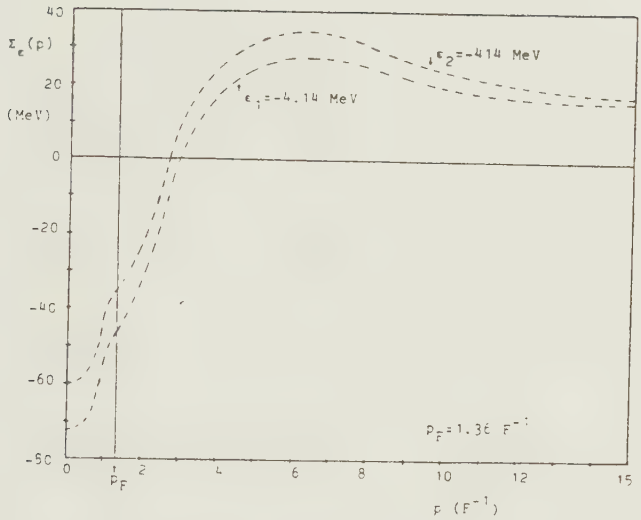
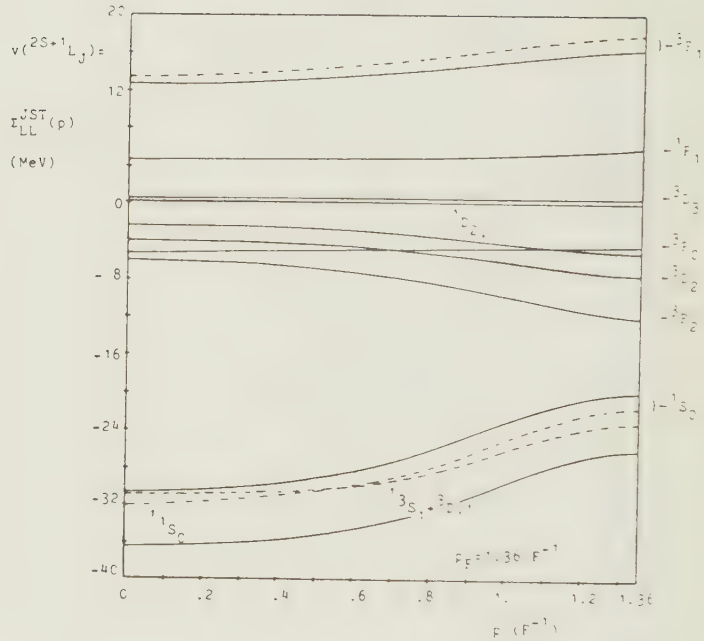


Abbildung 11.



(Abbildungsunterschrift s. S. 216)

Abbildung 12.



(Abbildungsunterschriften s. S. 216ff)

Abbildung 13.

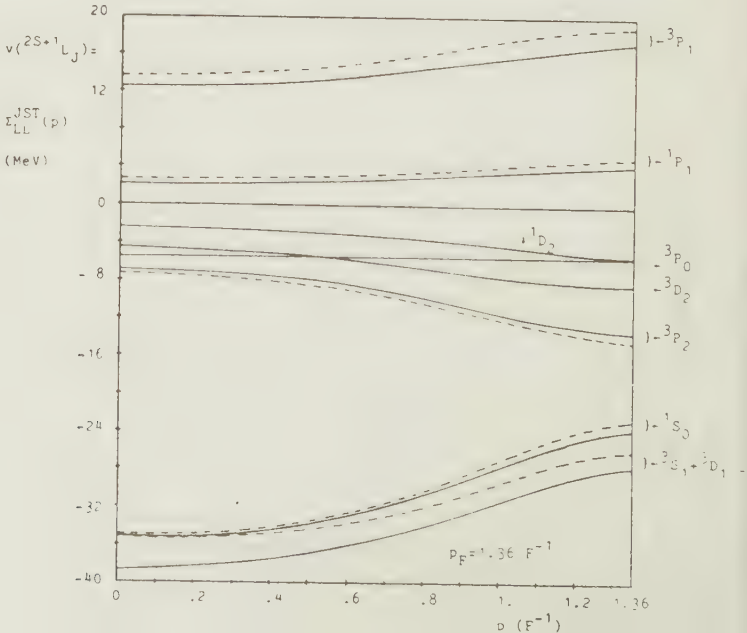
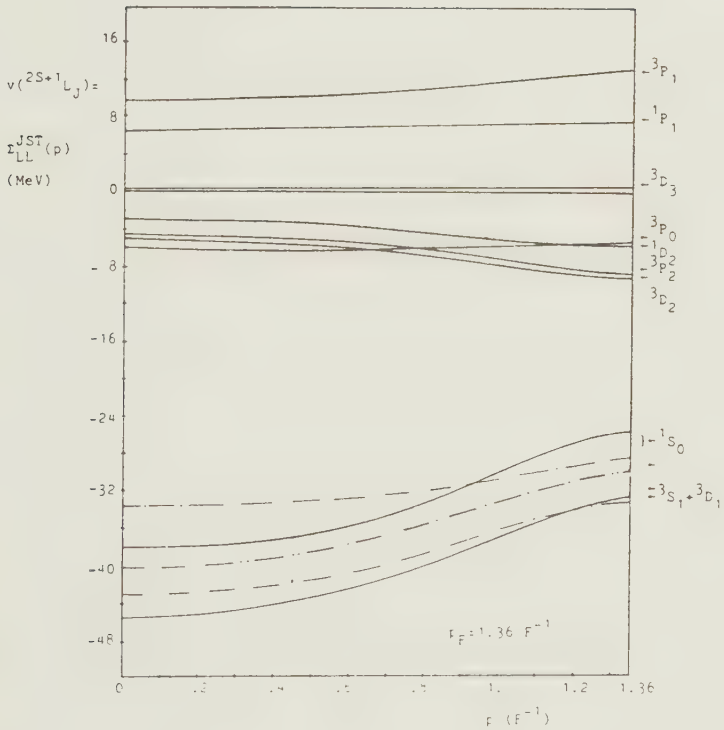
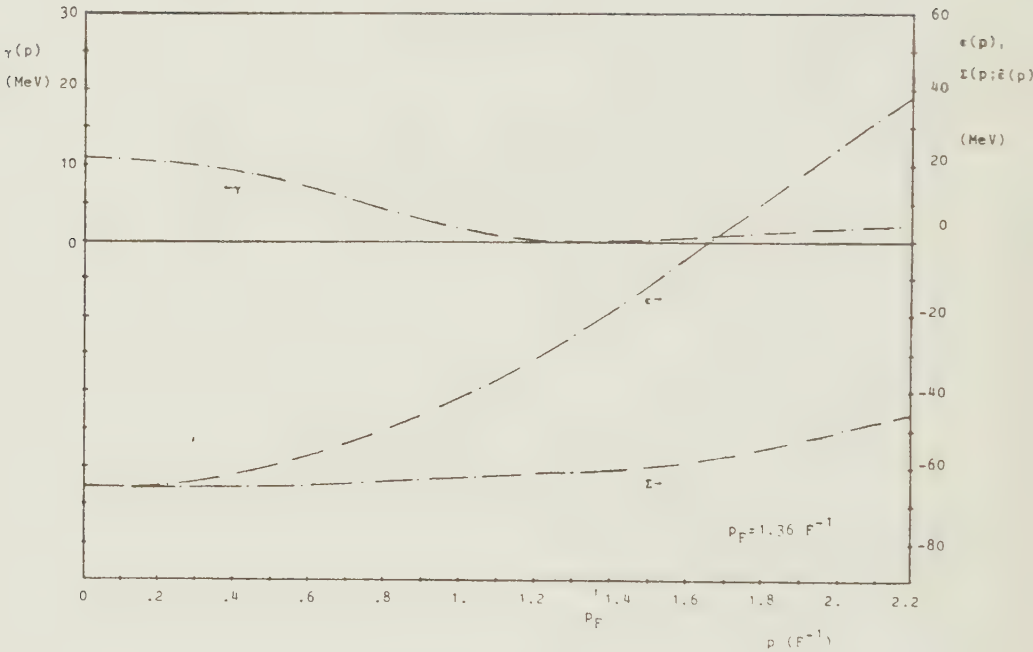


Abbildung 14.



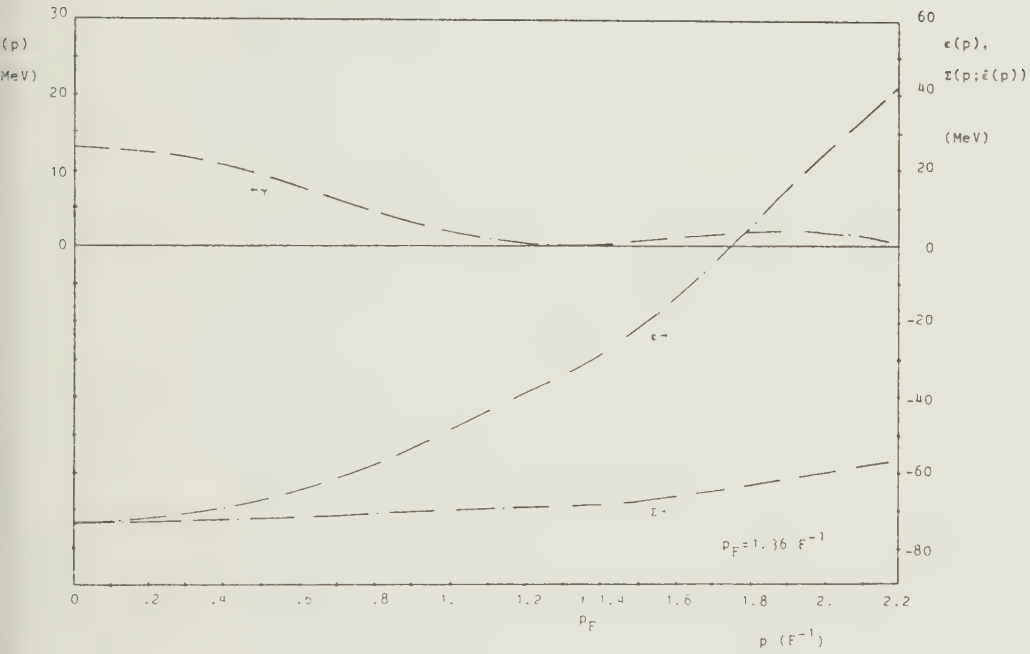
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 15.



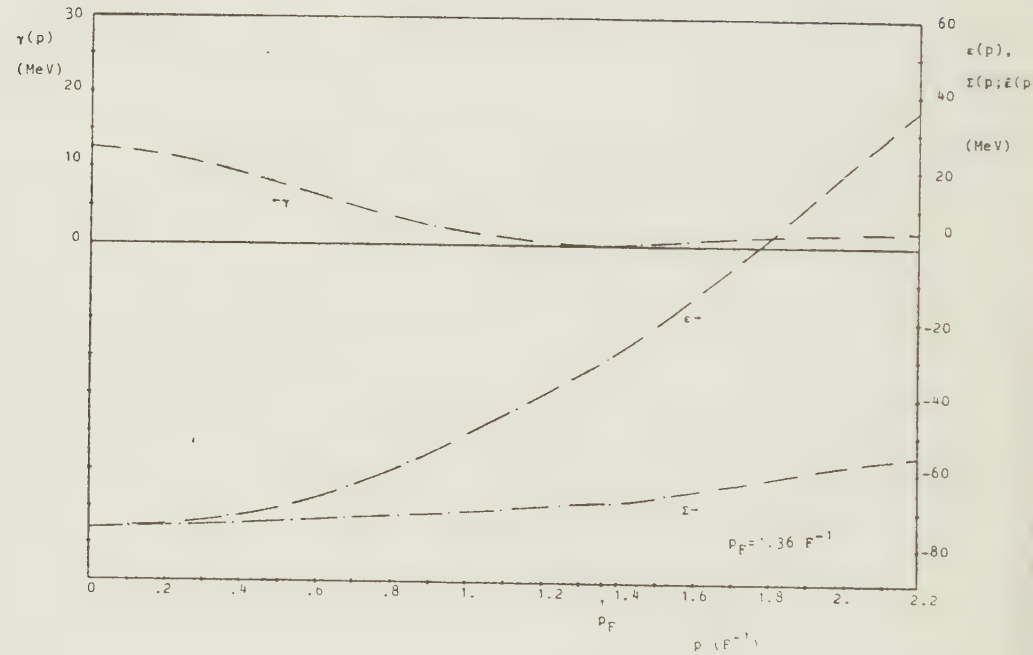
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 16.



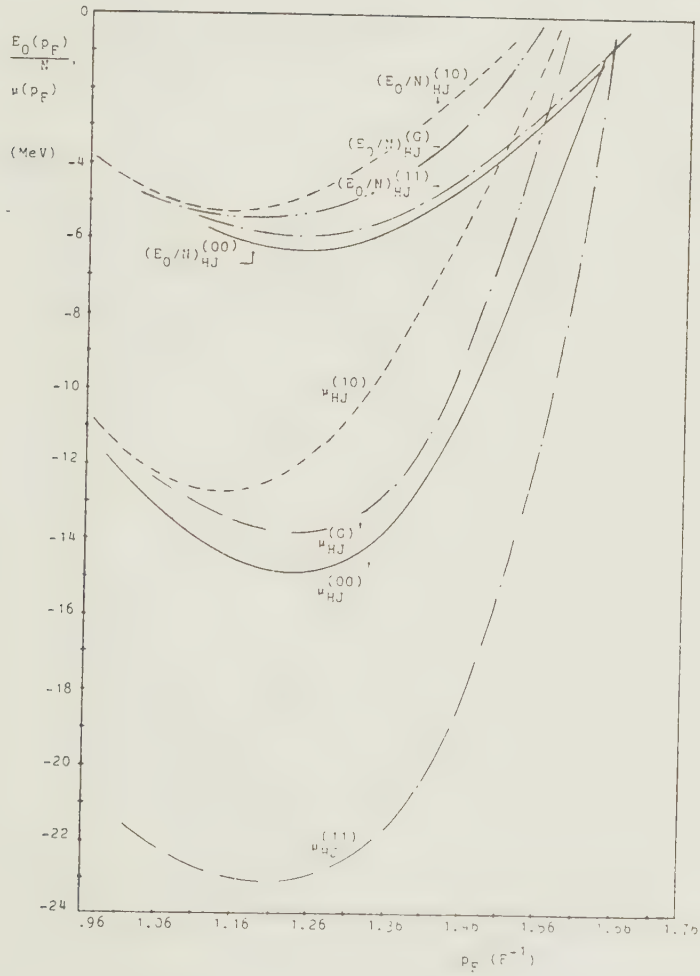
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 17.



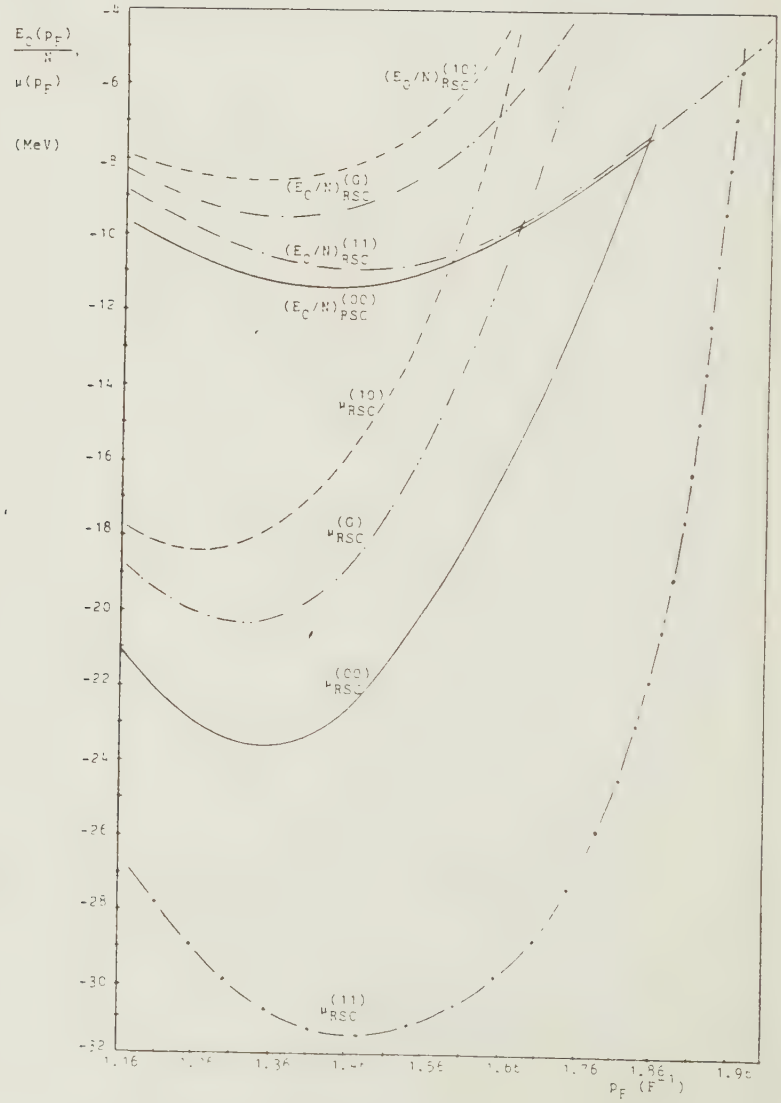
(Abbildungsunterschift s. S. 217)

Abbildung 18.



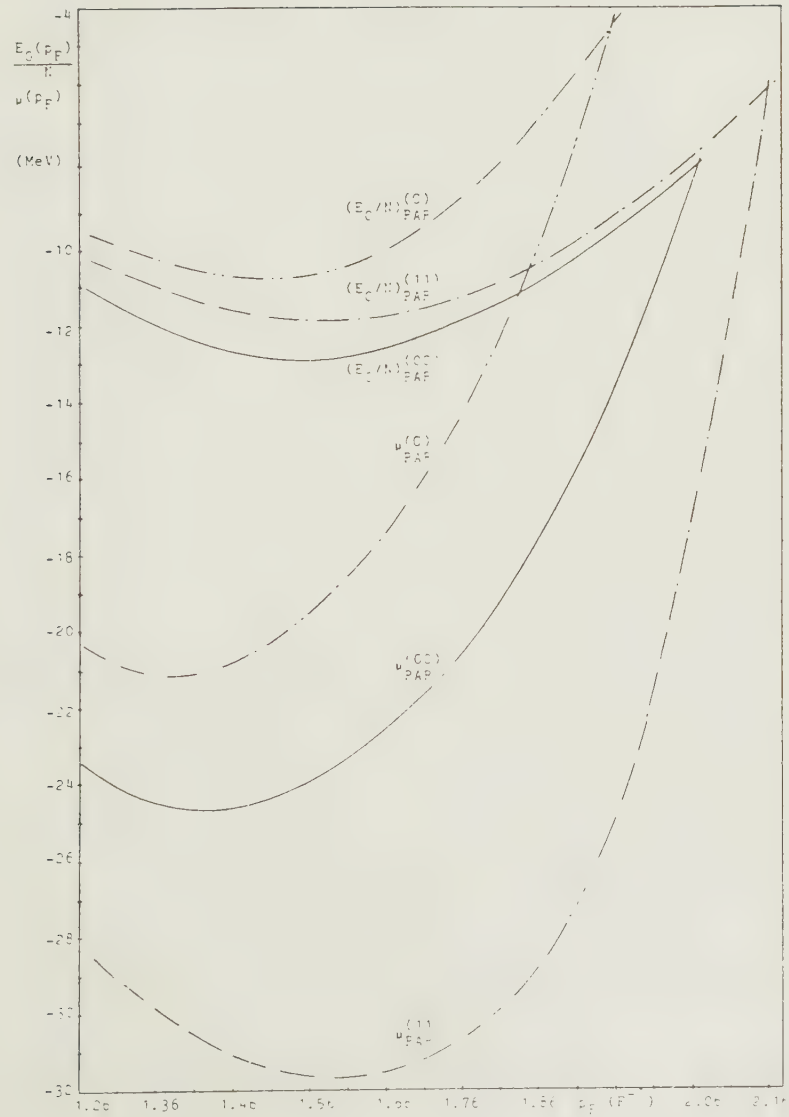
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 19.



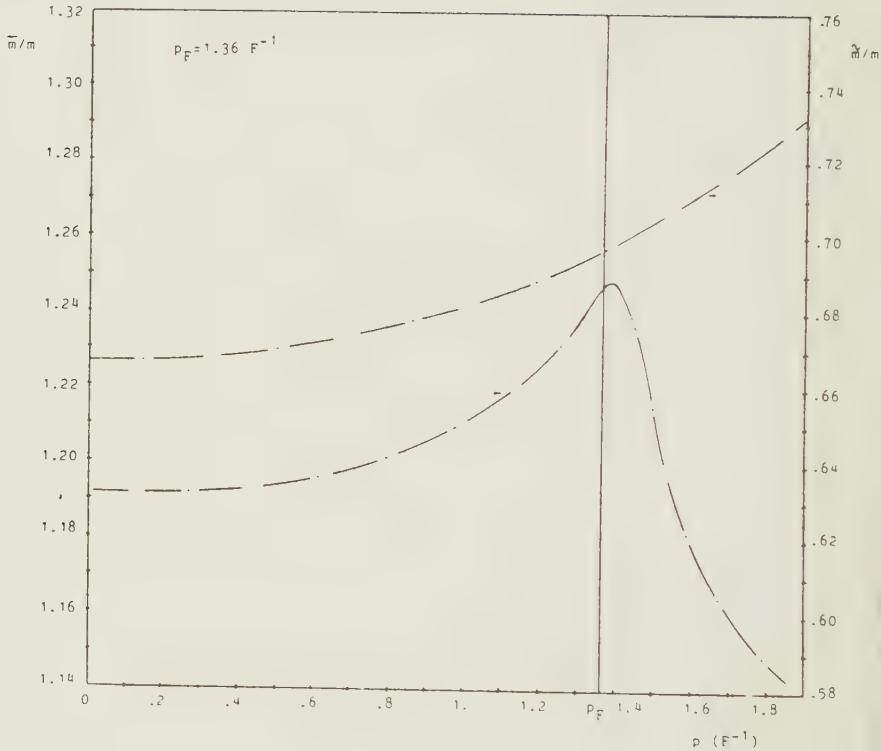
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 20.



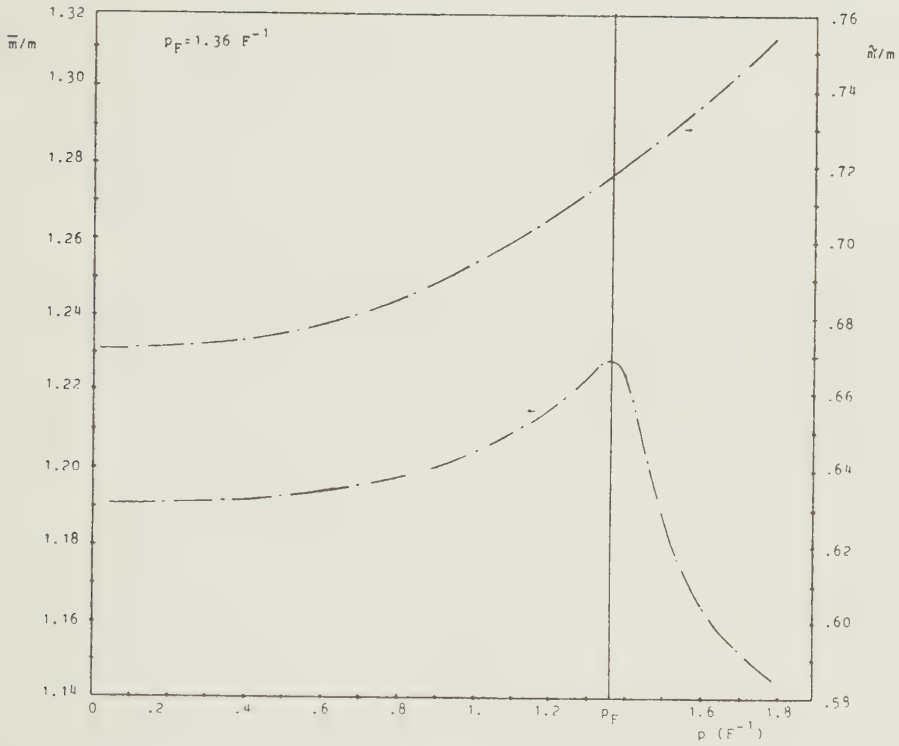
(Abbildungsunterschrift s. S. 217)

Abbildung 21.



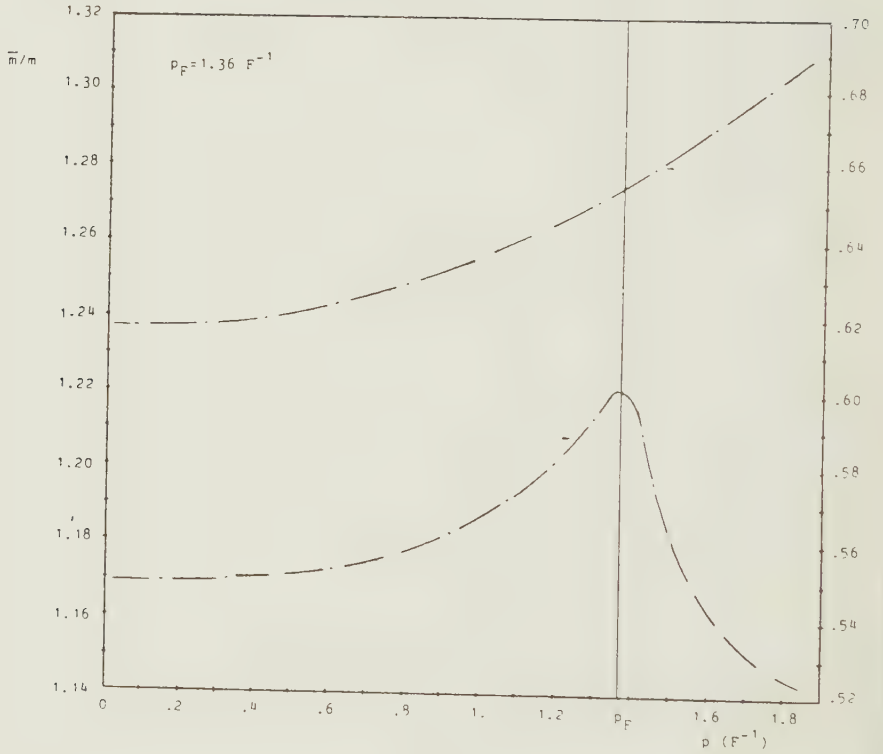
(Abbildungsunterschrift s. S. 218)

Abbildung 22.



(Abbildungsunterschrift s. S. 218)

Abbildung 23.



(Abbildungsunterschrift s. S. 218)

Tabelle 1. Überblick über den Satz der berechneten Partialwellen.

Potential-parameter IPOT(*)	Partialwelle	Quantenzahlen J S T L L'	Potentiale HJ	RSC	PAR
5	$^1S_0$	0 0 1 0 0	+	+	+
2	$^1P_1$	1 0 0 1 1	+	+	+
1	$^3P_0$	0 1 1 1 1	+	+	+
3	$^3P_1$	1 1 1 1 1	+	+	+
6	$^3P_2+^3F_2$ (**)	2 1 1 1 1	+	+	+
7	$^1D_2$	2 0 1 2 2	+	+	+
4	$^3D_2$	2 1 0 2 2	+	+	+
8	$^3D_3+^3G_3$ (**)	3 1 0 2 2	+	-	+
9		1 1 0 0 0	+	+	+
10	$^3S_1+^3D_1$	1 1 0 0 2	+	+	+
11		1 1 0 2 2	+	+	+

(*) IPOT wurde als Schleifenparameter in den Computerprogrammen benutzt.

(**) Die $^3P_2$- und $^3D_3$-Wellen wurden approximativ (Entkopplung) behandelt. Nach Sprung (SP72) und den Autoren (BS71,CPS75) gilt näherungsweise für die Einteilchenpotentiale $\sum_{0}^{2} v(^3P_1) = 0$. Die Entkopplung bestätigt diesen Sachverhalt. Eine vollständige Vernachlässigung des $^3P_2$-Kanals trägt der Beziehung von Sprung nicht Rechnung und ändert die Bindungsenergie pro Nukleon um mehrere MeV. Die $^3D_3$-Welle, die einen Beitrag zum Einteilchenpotential $V(\rho)$ von $\lesssim .2$ MeV liefert (MD83,LMG84), ändert die Bindungsenergie nur geringfügig.

Tabelle 2. Die Potentialparameter des Hamada-Johnston-Potentials (HJ62).

Zustand	a_C	b_C	a_T	b_T	G_{SO}	b_{SO}	G_{SO2}	a_{SO2}	b_{SO2}
SE	+8.7	+10.6					-0.000891	+0.2	-0.2
TO	-9.07	+3.48	-1.29	+0.55	+0.1961	-7.12	-0.000891	-7.26	+6.92
TE	+6.0	-1.0	-0.5	+0.2	+0.0743	-0.1	+0.00267	+1.8	-0.4
SO	-8.0	+12.0					-0.00267	+2.0	+6.0

Hard-Core-Radius c=0.343 (in allen Zuständen), d.h. r_c=.4854 F.

Tabelle 3. Die Potentialparameter des Paris-Nukleon-Nukleon-Potentials (L+80).

T=0-Potentialparameter

(Die Notation $a_{\pm}n$ steht für $a\,10^{\pm n}$)

Central Singlet Potential V_0^s

m_j(fm^{-1})	0.699 536 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	0.322 908 74 + 02	−0.824 656 31 + 02	0.123 293 84 + 04	−0.188 598 79 + 05
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.172 926 83 + 06	−0.788 352 77 + 06	0.218 904 75 + 07	−0.384 472 87 + 07
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.279 805 59 + 07	0.502 518 28 + 06	−0.260 061 24 + 07	see Eq. (9)

Central Triplet Potential V_0^t

m_j(fm^{-1})	0.699 536 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	−0.107 636 25 + 02	−0.429 736 69 + 02	−0.718 568 44 + 03	0.424 691 20 + 04
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.345 740 24 + 05	0.126 711 89 + 06	−0.274 168 41 + 06	0.529 607 24 + 06
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.366 067 13 + 06	−0.223 036 73 + 06	0.406 838 33 + 06	see Eq. (9)

Central Singlet Potential V_1^s

m_j(fm^{-1})	0.699 536 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j	−0.859 800 98 − 02	0.268 143 85 − 01	−0.132 806 93 + 01	0.103 242 89 + 02
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.115 270 87 + 03	0.694 561 75 + 03	−0.238 793 35 + 04	0.423 860 11 + 04
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.245 216 04 + 04	−0.195 128 21 + 04	0.418 011 60 + 04	see Eq. (9)

Central Triplet Potential V_1^t

m_j(fm^{-1})	0.699 536 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j	0.286 600 32 − 02	−0.817 980 46 − 03	−0.533 145 60 + 00	0.831 620 30 + 00
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.311 823 95 + 02	0.300 413 84 + 03	−0.124 150 87 + 04	0.247 622 41 + 04
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.130 430 30 + 04	−0.214 965 77 + 04	0.409 968 17 + 04	see Eq. (9)

Spin-Orbit Potential V_{LS}

m_j(fm^{-1})		0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)		−0.661 784 21 + 02	0.289 036 68 + 04	−0.625 924 00 + 05
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.691 461 41 + 06	−0.409 891 46 + 07	0.140 320 93 − 08	−0.268 274 68 + 08
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.235 114 42 + 08	−0.146 884 81 + 08	see Eq. (9)	see Eq. (9)

Tensor Potential V_T

m_j(fm^{-1})	0.699 536 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	−0.107 636 25 + 02	−0.468 180 28 + 00	0.601 477 39 + 02	0.352 569 41 + 03
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.514 321 70 + 03	0.116 773 02 + 05	−0.445 954 15 + 05	0.682 117 38 + 05
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.481 276 68 + 05	0.705 140 08 + 04	see Eq. (9)	see Eq. (9)

Quadratic Spin Orbit V_{SO1}

m_j(fm^{-1})		0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j		−0.626 510 20 + 00	−0.762 901 87 + 02	−0.788 275 81 + 03
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.649 047 98 + 04	0.547 343 78 + 04	−0.329 419 12 + 05	0.248 491 32 + 06
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.180 129 56 + 05	see Eq. (9)	see Eq. (9)	see Eq. (9)

T=1-Potentialparameter

Central Singlet Potential V_0^s

m_j(fm^{-1})	0.684 026 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	−0.100 774 27 + 02	−0.120 495 64 + 03	−0.212 364 60 + 03	−0.871 741 98 + 04
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.643 833 77 + 05	−0.213 421 47 + 06	0.494 583 57 + 06	−0.667 153 34 + 06
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.529 675 68 + 06	−0.137 034 12 + 06	−0.346 971 94 + 06	see Eq. (9)

Central Triplet Potential V_0^t

m_j(fm^{-1})	0.684 026 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	0.335 914 22 + 01	−0.864 795 68 + 02	−0.465 931 11 + 03	0.186 730 85 + 04
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.365 092 13 + 04	−0.196 743 38 + 05	0.123 231 40 + 06	−0.314 493 61 + 06
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.242 424 40 + 06	0.166 904 04 + 06	−0.485 343 84 + 06	see Eq. (9)

Central Singlet Potential V_1^s

m_j(fm^{-1})	0.684 026 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j	0.268 513 93 − 02	0.610 924 55 − 01	−0.842 642 58 + 00	0.147 363 12 + 02
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.145 219 93 + 03	0.841 583 89 + 03	−0.278 611 70 + 04	0.505 645 10 + 04
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.336 742 05 + 04	−0.178 455 29 + 04	0.535 482 66 + 04	see Eq. (9)

Central Triplet Potential V_1^t

m_j(fm^{-1})	0.684 026 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j	−0.895 046 44 − 03	0.374 884 81 − 01	−0.882 730 89 + 00	0.141 234 75 + 02
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.146 601 52 + 03	0.841 914 62 + 03	−0.263 942 73 + 04	0.526 534 27 + 04
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.350 004 30 + 04	−0.248 784 79 + 04	0.730 681 21 + 04	see Eq. (9)

Spin-Orbit Potential V_{LS}

m_j(fm^{-1})		0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)		−0.426 003 59 + 03	0.362 795 17 + 05	−0.575 570 33 + 06
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.800 338 34 + 07	−0.345 184 43 + 08	0.113 554 59 + 09	−0.207 292 09 + 09
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.171 315 48 + 09	−0.864 182 22 + 08	see Eq. (9)	see Eq. (9)

Tensor Potential V_T

m_j(fm^{-1})	0.684 026 00 + 00	0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)	0.335 914 22 + 01	−0.859 458 24 + 00	−0.104 763 40 + 03	0.126 284 65 + 04
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	−0.186 910 61 + 05	0.104 132 46 + 06	−0.332 118 10 + 06	0.555 857 82 + 06
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	−0.349 186 64 + 06	−0.119 450 13 + 06	see Eq. (9)	see Eq. (9)

Quadratic Spin-Orbit V_{SO1}

m_j(fm^{-1})		0.160 000 00 + 01	0.230 000 00 + 01	0.300 000 00 + 01
g_j(MeV)		−0.622 186 40 + 00	0.186 445 58 + 03	−0.370 911 18 + 04
m_j	0.370 000 00 + 01	0.440 000 00 + 01	0.510 000 00 + 01	0.580 000 00 + 01
g_j	0.569 131 17 + 05	−0.369 985 80 + 06	0.145 376 43 + 07	−0.313 624 71 + 07
m_j	0.650 000 00 + 01	0.820 000 00 + 01	0.990 000 00 + 01	0.113 000 00 + 02
g_j	0.243 390 81 + 07	see Eq. (9)	see Eq. (9)	see Eq. (9)

Tabelle 3'. Berechnete Potentialparameter zu Tabelle 3.

Potential		T=0-Potential-parameter g_j	T=1-Potential-parameter g_j
Central Singlet Potential V_0^a (*)	(j=12)	.15528303+07	.28509943+06
Central Triplet Potential V_1^a	(j=12)	.17678841+06	.27625959+05
Central Singlet Potential V_0^b	(j=12)	-.22508690+04	-.32465460+04
Central Triplet Potential V_1^b	(j=12)	-.22000183+04	-.45574732+04
Spin-Orbit Potential V_{SO}	(j=11)	.12206548+08	.56271580+08
	(j=12)	-.47565637+07	-.18345800+08
Tensor Potential V_T	(j=11)	.30188490+05	.32952970+06
	(j=12)	-.29444569+05	-.17079672+06
Quadratic, Spin-Orbit V_{SO2}	(j=10)	-.86736090+06	.14589455+07
	(j=11)	.55455935+06	-.52668478+07
	(j=12)	.18614661+06	.34496510+07

(*) Die Bedeutung von j geht aus Tabelle 3 hervor.

Die Parameter g_j sind so zu bestimmen, daß die folgenden Relationen gelten:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-1} = 0 \quad \text{für } V^a_{0,1} \text{ und } V^b_{0,1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-1} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-3} \quad \text{für } V_T \text{ und } V_{SO},$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-1} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-3} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} g_j m_j^{-5} = 0 \quad \text{für } V_{SO2},$$

$$g_n = -m_n \sum_{j=1}^{n-1} g_j m_j^{-1} \quad \text{für } V^a_{0,1} \text{ und } V^b_{0,1},$$

$$\left.\begin{aligned} g_{n-1} &= m_{n-1}^3 \left(m_{n-1}^2 - m_n^2\right)^{-1} \left(m_n^2 \sum_{j=1}^{n-2} g_j m_j^{-3} - \sum_{j=1}^{n-2} g_j m_j^{-1}\right) \\ g_n &= m_n^3 \left(m_n^2 - m_{n-1}^2\right)^{-1} \left(m_{n-1}^2 \sum_{j=1}^{n-2} g_j m_j^{-3} - \sum_{j=1}^{n-2} g_j m_j^{-1}\right) \end{aligned}\right\} \text{ für } V_{SO} \text{ und } V_T$$

$$\begin{aligned} g_{n-2} = m_{n-2}^5 \left(\left(m_n^2 - m_{n-2}^2\right)\left(m_{n-1}^2 - m_{n-2}^2\right)\right)^{-1} \Big(&-m_{n-1}^2 m_n^2 \sum_{j=1}^{n-3} g_j m_j^{-5} + \\ &\left(m_{n-1}^2 + m_n^2\right) \sum_{j=1}^{n-3} g_j m_j^{-3} - \sum_{j=1}^{n-3} g_j m_j^{-1}\Big). \end{aligned} \quad \text{für } V_{SO2}$$

(Die Gleichungen für g_{n-1} und g_n der letzten Zeile ergeben sich durch zyklische Permutation von n-2, n-1 und n.)

Tabelle 4. Vergleich der berechneten Kernmateriegrößen mit den von Fiset und Foster (FF72) angegebenen Werten.

	$\Lambda^{(00)}$ (FF72)	$\Lambda^{(00)}$	$\Lambda^{(10)}$ (FF72)	$M_\Lambda(10)^{(*)}$
p_F (F^{-1})	1.251	1.251	1.033	1.033
$E_0(N)/N$ (MeV)	-6.4	-6.23	-4.6	-4.84
r_0 (F)$^{(**)}$	1.31	1.313	1.53	1.556
m*/m	/	.803	/	.829
μ (MeV)	/	-15.02	/	-12.03

(*) Der Trend der Resultate, die man bei Verwendung des modifizierten $\Lambda^{(10)}$-Propagators aus Gleichung (4.3.27) erhält, ist in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Fiset und Foster (FF72). Als Startwerte für die $\Lambda^{(11)}$-Rechnungen können sowohl die $\Lambda^{(00)}$- als auch die $\Lambda^{(10)}$-Ergebnisse dienen.

(**) Zur Definition der folgenden Größen s. Kapitel 7.

Tabelle 5. Zusammenstellung der berechneten Kernmateriegrößen für verschiedene Fermiimpulse im Fall der $\Lambda^{(00)}$-Methode. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde das HJ-Potential verwendet.

$\Lambda^{(00)}_{HJ}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.26	1.36	1.46
m*/m	.794	.803	.772	.745
r_0 (F)	1.418	1.313	1.223	1.148
ρ (F^{-3})	.083	.106	.130	.157
μ (MeV)	-14.62	-15.02	-13.84	-10.98
$E_0(N)/N$ (MeV)	-6.09	-6.24	-5.76	-4.61

Tabelle 6. Wie Tabelle 5 (für RSC-Potential).

$\Lambda^{(00)}_{RSC}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.36	1.46	1.66
m^*/m	.757	.722	.661	.610
r_0 (F)	1.395	1.195	1.118	.994
ρ (F^{-3})	.088	.14	.171	.243
μ (MeV)	-21.3	-23.74	-22.19	-17.83
$E_0(N)/N$ (MeV)	-9.6	-11.33	-11.41	-9.88

Tabelle 7. Wie Tabelle 5 (für PAR-Potential).

$\Lambda^{(00)}_{PAR}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.36	1.56	1.76
m^*/m	.748	.708	.657	.607
r_0 (F)	1.388	1.185	1.036	.923
ρ (F^{-3})	.089	.144	.215	.304
μ (MeV)	-21.54	-25.07	-24.41	-21.25
$E_0(N)/N$ (MeV)	-10.08	-12.30	-13.26	-12.25

Tabelle 8. Zusammenstellung der berechneten Kernmateriegrößen für verschiedene Fermiimpulse im Fall der $\Lambda^{(10)}$-Methode. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde das HJ-Potential verwendet.

$M_{\Lambda^{(10)}_{HJ}}$				
p_F (F^{-1})	.96	1.06	1.26	1.46
m^*/m	.821	.823	.758	.759
r_0 (F)	1.662	1.518	1.29	1.129
ρ (F^{-3})	.052	.068	.111	.166
μ (MeV)	-9.84	-12.43	-11.9	-5.95
$E_0(N)/N$ (MeV)	-3.95	-5.02	-4.79	-1.79

Tabelle 9. Wie Tabelle 8 (für RSC-Potential).

$M_{\Lambda^{(10)}_{RSC}}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.36	1.46	1.66
m^*/m	.759	.708	.68	.659
r_0 (F)	1.364	1.168	1.093	.97
ρ (F^{-3})	.094	.15	.183	.262
μ (MeV)	-17.88	-17.83	-15.85	-6.81
$E_0(N)/N$ (MeV)	-7.97	-8.5	-8.29	-4.60

Tabelle 10. Zusammenstellung der berechneten Kernmateriegrößen für verschiedene Fermiimpulse im Fall der $\Lambda^{(11)}$-Methode. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde das HJ-Potential verwendet.

$\Lambda^{(11)}_{HJ}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.26	1.36	1.46
m^*/m	.841	.853	.867	.827
r_0 (F)	1.324	1.218	1.132	1.054
ρ (F^{-3})	.099	.125	.159	.190
μ (MeV)	-23.22	-23.11	-21.81	-18.75
$E_0(N)/N$ (MeV)	-5.69	-5.91	-5.51	-4.82

Tabelle 11. Wie Tabelle 10 (für RSC-Potential).

$\Lambda^{(11)}_{RSC}$				
p_F (F^{-1})	1.36	1.46	1.56	1.66
m^*/m	.881	.821	.736	.833
r_0 (F)	1.129	1.051	.984	.924
ρ (F^{-3})	.167	.206	.251	.303
μ (MeV)	-30.91	-31.30	-30.05	-29.79
$E_0(N)/N$ (MeV)	-10.64	-11.02	-10.65	-9.99

Tabelle 12. Wie Tabelle 10 (für PAR-Potential).

$\Lambda^{(11)}_{PAR}$				
p_F (F^{-1})	1.46	1.56	1.66	1.76
m^*/m	.820	.775	.780	.786
r_0 (F)	1.051	.983	.923	.871
ρ (F^{-3})	.206	.251	.303	.362
μ (MeV)	-31.61	-32.13	-32.22	-31.49
$E_0(N)/N$ (MeV)	-11.95	-12.11	-12.15	-11.73

Tabelle 13. Zusammenstellung der berechneten Kernmateriegrößen für verschiedene Fermiimpulse bei Verwendung des $\Lambda^{(G)}$-Propagators. Als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wurde das HJ-Potential verwendet.

$\Lambda^{(G)}$					
p_F (F^{-1})	1.06	1.16	1.26	1.36	1.46
m^*/m	.778	.756	.779	.833	.811
r_0 (F)	1.512	1.387	1.285	1.204	1.125
ρ (F^{-3})	.069	.089	.113	.137	.168
μ (MeV)	-12.33	-13.60	-13.86	-12.95	-9.31
$E_0(N)/N$ (MeV)	-4.97	-5.49	-5.39	-4.61	-2.74

Tabelle 14. Wie Tabelle 13 (für RSC-Potential).

$\Lambda^{(G)}_{RSC}$				
p_F (F^{-1})	1.16	1.36	1.46	1.66
m^*/m	.721	.692	.658	.61[illegible]
r_0 (F)	1.37	1.174	1.097	.971
ρ (F^{-3})	.093	.147	.181	.2[illegible]
μ (MeV)	-18.82	-20.49	-18.61	-11.39
$E_0(N)/N$ (MeV)	-8.39	-9.61	-9.37	-6.72

Tabelle 15. Wie Tabelle 13 (für PAR-Potential).

$\Lambda^{(G)}_{PAR}$					
p_F (F^{-1})	1.16	1.36	1.56	1.76	1.96
m^*/m	.681	.664	.628	.592	.549
r_0 (F)	1.36	1.162	1.016	.903	.806
ρ (F^{-3})	.095	.1[illegible]	.2[illegible]	.3[illegible]	.4[illegible]
μ (MeV)	-18.74	-21.60	-19.93	-15.01	-4.46
$E_0(N)/N$ (MeV)	-8.80	-10.64	-10.92	-9.21	-4.42

Tabelle 16. Zusammenstellung der mit den Λ-Methoden berechneten Kernmateriegrößen an den jeweiligen Sättigungsimpulsen.

Λ-Methode	$E_0(N)/N$ (MeV)	ρ (F^{-3})	p (F^{-1})	$\varkappa$ (MeV)
$\Lambda^{(00)}_{HJ}$	-6.27	.099	1.245	87.63
$\Lambda^{(10)}_{HJ}$	-5.28 (*)	.087	1.145	144.72
$\Lambda^{(11)}_{HJ}$	-5.88	.123	1.240	65.98
$\Lambda^{(G)}_{HJ}$	-5.53 (*)	.098	1.192	109.95
$\Lambda^{(00)}_{RSC}$	-11.45	.164	1.430	148.72
$\Lambda^{(10)}_{RSC}$	-8.55	.144	1.334	80.18
$\Lambda^{(11)}_{RSC}$	-10.96	.209	1.461	92.28
$\Lambda^{(G)}_{RSC}$	-9.58	.154	1.378	140.52
$\Lambda^{(00)}_{PAR}$	-13.17	.213	1.548	162.03
$\Lambda^{(11)}_{PAR}$	-12.19 (*)	.279	1.620	86.42
$\Lambda^{(G)}_{PAR}$	-10.99	.204	1.492	97.64

(*) Der Wert der Bindungsenergie $E_0(N)/N$ liegt nicht auf dem Coester-Band (MA81).

Tabelle 17. Vergleich der mit der $\Lambda^{(00)}$-Methode berechneten Kernmateriegrößen (in runden Klammern) mit den Resultaten der Brueckner-Theorie.

Ref.	(LMG84)	(MD83)	(L+80)	(BS71,CPS75)	(SP72)
Methode	BHF(*)	BHF	BHF	BBG(**)	BBG
Potential	PAR	PAR	PAR	RSC	HJ
$E_0(N)/N$ (MeV)	-16.1±2.	-21	-11.22(-13.17)	-11.30(-11.45)	-7.23(-6.27)
$\varkappa$ (MeV)	/	/	/ (162)	138(149)	82.5(87.63)
p_F (F^{-1}) (Sättigungsimpuls)	1.62	1.6	1.51(1.55)	1.43(1.43)	1.27(1.25)

(*) BHF=Brueckner-Hartree-Fock Methode (s. Ref. (BG58,JLM64,DA67,JLM76,MA81,DA81)).

(**) BBG=Brueckner-Bethe-Goldstone Methode (s. Ref. (MA81,PW79) und Anhang A.8).

Tabelle 18. $\Lambda^{(11)}$-Impulsverteilung im Fall des Hard-Core-Potentials von Hamada-Johnston (p_F=1.26 F^{-1}).

p (F^{-1})	.01	.38	.76	1.	1.25	1.27	1.61	1.95
$z(p)$ ($\approx n(p)$, $\bar{\nu}\approx z(p)$)	.8873	.8854	.8842	.8813	.8743	.8692	.8929	.9372
$n(p)$ ($\bar{\nu}$=1)	.978	.9779	.9747	.9721	.9272	.0518	.0098	.0021
$n^{HC}(p)^{(*)}$ ($\bar{\nu}$=.71)	.7411	.7395	.7390	.7385	.7355	.1092	$^{(**)}_{*}$ .0493	.0016
$n^{BEL}(p)^{(**)}$	.738	.7264	.7135	.6835	.5708	.1442	.0641	.0386

(*) Impulsverteilung im Fall der "HJ-Wechselwirkung" ($V(r<c)=\infty$ und $V(r>c)=0$, c=Hard-Core-Radius, s. Tabelle 2). Zum Vergleich sind die Resultate aus (SM80) für ein verdünntes Fermigas (unterste Zeile) angegeben.

(**) Impulsverteilung eines verdünnten Fermigases (GA58,GM58) nach Belyakov, Sartor und Mahaux (SM80).

$(^{*}_{*})$ Für den quantitativen Vergleich mit $n^{BEL}(p)$ wurde die Klammer ($\bar{\nu}-z_p$) in der ersten Zeile von Gleichung (7.2.27) durch deren Absolutbetrag ersetzt.

Literaturverzeichnis.

(AB63) A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov und J.E. Dzyaloskinski, "Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics", Pergamon Press, Oxford 1963

(AM60+) Y.M. Amus'ya, Sov. Phys.-JETP 39 (1960) 639; 12 (1961) 449 14 (1962) 309; 16 (1963) 205

(AR81) A. Armin, Nucl. Phys. A354 (1981) 19

(AS68) M. Abramawitz und I.A. Stegun, Handbook of Math. Functions Dover-New York 1968

(BA62) G. Baym, Phys. Rev. 127 (1962) 1391

(BB36) H.A. Bethe und R.F. Bacher, Rev. Mod. Phys. 8 (1936) 82

(BE71) H.A. Bethe, Annu. Rev. Nucl. Sci. 21 (1971) 93

(BF70) F.W. Byron, R.W. Fuller, "Mathematics of Classical and Quantum Physics", Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company, London u.a. 1970

(BG57) H.A. Bethe und J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A238 (1957) 55

(BG58) K.A. Brueckner, J.L. Gammel, Phys. Rev. 109 (1958) 1023

(BI73) R.F. Bishop, Phys. Rev. C, Nucl. Phys. 7 (1973) 479

(BI73+) R.F. Bishop, Ann. Phys. 77 (1973) 106

(BJ76) G.E. Brown und A.D. Jackson, "The Nucleon-Nucleon Interaction", North-Holland, Amsterdam 1976

(BK61) G. Baym, L.P. Kadanoff, Phys. Rev. 124 (1961) 287

(BK62) G. Baym und L.P. Kadanoff, "Quantum Statistical Mechanics" Benjamin, New York 1962

(BL55) K.A. Brueckner, C.A. Levinson, Phys. Rev. 97 (1955) 1344

(BM62) K.A. Brueckner, K.S. Masterson, Phys. Rev. 128 (1962) 2267

(BM69) A. Bohr, B.R. Mottelson, "Nuclear Structure", Vol. 1, Benjamin, New York-Amsterdam 1969

(BPW70) W.D. Brown, R.D. Puff und L. Wilets, Phys. Rev. C2 (1970)

(BR56) K.A. Brueckner, Phys. Rev. 100 (1956) 36

(BR58) K.A. Brueckner, in "The Many-Body Problem", S.47-154, Les Houches 1958, Wiley, New York 1958

(BR66) B.H. Brandow, Phys. Rev. 152 (1966) 863

(BR71) G.E. Brown, "Unified Theory of Nuclear Models and Forces", North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1971

(BS66) D.E. Beck und A.M. Sessler, Phys. Rev. 146 (1966) 161

(BS67) G. Baumgärtner, P. Schuck, "Kernmodelle", BI Hochschultaschenbücher 203/203a, München 1967

(BS71) P.K. Banerjee und D.W.L. Sprung, Can. J. Phys. 49 (1971) 1899

(BSI74) R.F. Bishop, M.R. Strayer und J.M. Irvine, Phys. Rev. A10 (1974) 2423

(BV72) M. Baranger, E. Vogt, "Advances in Nuclear Physics", Vol. 5, Plenum Press New York-London 1972

(BW63) W. Brenig, H. Wagner, Z. Phys. 173 (1963) 484

(CS51) E.U. Condon und G.H. Shortley, "The Theory of Atomic Spectra", Cambridge University Press 1951

(CD65) S.A. Coon und J. Dabrowski, Phys. Rev 140 (1965) B287

(CH77) S.A. Chin, Ann. Phys. 108 (1977) 301

(CK81) S.W. Wong und K.F. Lu, "Nucleon-Nucleon Interactions", Lecture Notes in Physics 144, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1981

(CPS75) F. Coester, S.C. Piper und F.J.D. Serduke, Phys. Rev. C11 (1975) 1

(DA67) B.D. Day, Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 719

(DA78) B.D. Day, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 495

(DA81) B.D. Day, Phys. Rev. C24 (1981) 1203

(DA81+) B.D. Day, Lecture Notes in Physics 142, Springer-Verlag, Berling u.a. 1981

(EC79) E.N. Economou, "Green's Functions in Quantum Physics", Springer-Verlag, Berlin u.a. 1979

(ED57) A.R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton Univ. Press, Princeton 1958

(EG72) J.M. Eisenberg, W. Greiner, "Microscopic Theory of the Nucleus", Vol. 3, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London 1972

(EW41) L. Eisenbud und F. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 27 (1941) 28

(FF71) T.C. Foster und E.O. Fiset, Nuovo Cimento 6 (1971) 129

(FF72) E.O. Fiset und T.C. Foster, Nucl. Phys. A184 (1972) 588

(FI70) E.O. Fiset, Phys. Rev C2 (1970) 85

(FOS66) T.C. Foster, Phys. Rev. 149 (1966) 784

(FR81) B.L. Friman, "Quasiparticle Properties in Nuclear Matter", Lecture Notes in Physics 142, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1981

(FW61) D.S. Falk und L. Wilets, Phys. Rev. 124 (1961) 1887

(FW71) A.L. Fetter und J.D. Walecka, "Quantum Theory of Many Particle Systems", Mc Graw Hill, New York 1971

(GA58) V.M. Galitskii, Sov. Phys.-JETP 34 (1958) 104

(GM58) V.M. Galitskii und A.B.Migdal, Sov. Phys.-JETP 34 (1958) 96

(GO57) J. Goldstone, Proc. R. Soc. London, Ser. A239 (1957) 267

(GW64) M.L. Goldberger und K.M. Watson, "Collision Theory", Wiley New York 1964

(GWW58) L.C. Gomes, J.D. Walecka und V.F. Weisskopf, Ann. Phys. (N.Y.) 3 (1958) 241

(GWW75) H. Gall, M. Weigel und G. Wegmann, Z. Phys. A275 (1975) 419

(GW76) H. Gall und M.K. Weigel, Z. Phys. A276 (1976) 45

(GW76+) H. Gall und M.K. Weigel, J. Phys. G Nucl. Phys. 2 (1976) L14

(HD59) L. Houches und C. Dewitt, "The Many Body Problem", DUNOD 1972

(HJ62) T. Hamada und I.D. Johnston, Nucl.Phys. 34 (1962) 382

(HK74) Q. Ho-Kim und F.C. Khanna, Ann. Phys. 86 (1974) 233

(HM77) P. Haensel und C. Marville, "Model Nuclear Matter Calculations in several Brueckner and Green's Function Theories", Priv. Comm. 1977

(HM78) P. Haensel und C. Marville, Z. Phys. A284 (1978) 83

(HV58) M. Hugenholtz und L. van Hove, Physica 24 (1958) 363

(IEA67) International Atomic Energy Agency, "Fundamentals in Nuclear Theory", STI/PUB/145, Vienna 1967

(IR72) J.M. Irvine, "Nuclear Structure Theory", International Series of Monographs in Natural Philosophy Vol. 49, Pergamon Press 1972

(JLM74) J.P. Jeukenne, A. Lejeune und C. Mahaux, Phys. Rev. C10 (1974) 1391

(JLM75) J.P. Jeukenne, A. Lejeune und C. Mahaux, Nucl. Phys. A245 (1975) 411

(JLM76) J.P. Jeukenne, A. Lejeune und C. Mahaux, "Many-Body Theory of Nuclear Matter", Phys. Rep. C25 (1976) 84

(JO75) C.J. Joachain, "Quantum Collision Theory", North-Holland Publishing Company-Amsterdam 1975

(KF61) K.L. Kowalski und D. Feldmann, J. of Math. Phys. 2 (1961) 499

(KF63) K.L. Kowalski und D. Feldmann, J. of Math. Phys. 4 (1963) 507

(KI67) D.A. Kirzhnits, "Field Theoretical Methods in Many-Body Systems", Pergamon Press, Oxford 1967

(KR65) A.S. Konrod, "Nodes and Weights of quadrature Formulaes, New York 1965

(KT69) Y.E. Kim und A. Tubis, Phys. Rev. C1 (1969) 414

(L+80) M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard und R. Vinh Mau, Phys. Rev. C21 (1980) 861

(L+81) M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vin Mauh, J. Coté, P. Pirês und R. Tourreil, Phys. Rev. C23 (1981) 2405

(LM63) E.L. Lomon und M. Mc Millan, Ann. of Phys. 23 (1963) 439

(LMG84) A. Lejeune, M. Martzolff und P. Grange, "Nuclear Matter Properties in the BHF Approximation with the Paris N-N Potential and Models of 3N Interactions", Lecture Notes in Physics 198, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1984

(LS68) R. Laughlin und L. Scott, Phys. Rev. 171 (1968) 1196

(LU60) J.M. Luttinger, Phys. Rev. 119 (1960) 1153

(LU61) J.M. Luttinger, Phys. Rev. 121 (1961) 942

(MA76) C. Marville, Z. Phys. A279 (1976) 175

(MA81) C. Mahaux, "Brueckner Theory of Infinite Fermi Systems", Lecture Notes in Physics 138, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1981

(MAR76) C. Marville, Z. Phys. A279 (1976) 175

(MD83) M.A. Matin und M. Dey, Phys. Rev. C27 (1983) 2356

(MH78) C. Marville und P. Haensel, Nucl. Phys. A295 (1978) 445

(MI57) A.B. Migdal, Sov. Phys.-JETP 5 (1957) 333

(MI66) A.B. Migdal, "Many-Body-Description of Nuclear Structure and Reactions", Hrsg. C. Bloch, Academic Press, New York 1966

(MS59) P.C. Martin und J. Schwinger, Phys. Rev. 115 (1959) 1342

(MW63) E.K. Maschke und W. Wild, Z. Phys. 172 (1963) 314

(NE60) R.G. Newton, J. of Math. Phys. 1 (1960) 319

(NE66) R.G. Newton, "Scattering Theory of Waves and Particles", Mc Graw-Hill Book Company, New York 1966

(NO64) P. Nozières, "Theory of Interacting Fermi Systems", Benjamin, New York 1964

(OG70) E. Østgaard, Nucl. Phys. A154 (1970) 202

(PE60) R.E. Peierls, in Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure, Kingston, Ontario, Toronto University Press 1960

(PRW66) R. Puff, A.S. Reiner und L. Wilets, Phys. Rev. 149 (1966) 778

(PU61) R. Puff, Ann. Phys. 13 (1961) 317

(PW79) V.R. Pandharipande und R.B.Wiringa, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 821

(R68) R.V. Reid Jr., Ann. of Phys. 50 (1968) 411

(RE64) A.S. Reiner, Phys. Rev. 133 (1964) 1105

(RFL62) M. Razavy, G. Field und J.S. Levinger, Phys. Rev. 125 (1962) 269

(ROS57) M.E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum", Wiley, New York 1957

(RO+59) M. Rotenberg, "The 3-j and 6-j Symbols", Technology Press, Cambridge-Massachusetts 1959

(RP63) J. Reynolds und R. Puff, Phys. Rev. 130 (1963) 1877

(RP63+) J. Reynolds und R. Puff, Phys. Rev. 130 (1963) 1891

(RS80) P. Ring, P. Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem", Springer-Verlag, New York 1980

(SC64) T.D. Schultz, "Quantum Field Theory and the Many-Body Problem", Gordon and Breach, New York 1964

(SCH76) B. Schwesinger, Dissertation, Universität München 1976

(SM80) R. Sartor und C. Mahaux, Phys. Rev. C21 (1980) 1546

(SM80+) R. Sartor und C. Mahaux, Phys. Rev. C21 (1980) 2613

(SP72) D.W.L. Sprung, "Nuclear Matter Calculations", in Advances in Nuclear Physics, Vol. 5 (p. 255), Plenum Press, New York-London 1972

(ST75) A.G. Sitenko, V.K. Tartakowski, "Lectures on the Theory of the Nucleus", Vol. 74, Pergamon Press 1975

(SW61) S.S. Schweber, "Relativistic Quantum Field Theory", Row, Peterson and Comp., Evanston 1961

(TA64) F. Tabakin, Ann. Phys. 30 (1964) 51

(TA72) J.R. Taylor, "Scattering Theory: The Quantum Theory on nonrelativistic Collisions", New York-London 1972

(TH59) D.J. Thouless, Phys. Rev 114 (1959) 1383

(TH61) D.J. Thouless, "The Quantum Mechanics of Many-Body Systems", Academic Press, New York-London 1961

(VI79) R. Vinh Mau, "The Paris N-N Potential in Mesons in Nuclei", edited by M. Rho and D. Wilkinson, Noth-Holland, Amsterdam 1979

(WE35) C.F. von Weizsäcker, Z. Phys. 96 (1935) 431

(WE58) V.F. Weisskopf, in "The Many-Body Problem", S. 317, Les Houches 1958, Wiley, New York 1958

(WE64) M. Weigel, Z. Naturforsch. 19a (1964) 1268

(WE82) F. Weber, "Kernmaterieuntersuchung mit der Quasi-Hartree-Fock (Q.H.F)-Methode", Diplomarbeit, Universität München 1982

(WEG68) G. Wegmann, Z. Phys. 211 (1968) 235

(WEG69) G. Wegmann, Z. Phys. 226 (1969) 60

(WEI66) M.K. Weigel, "Greensche Funktionen in der Theorie der Kernmaterie und des Optischen Potentials", Universität Frankfurt am Main 1966

(WGW76) T. Widmann, H. Gall und M.K. Weigel, Nuovo Cimento 15 N. 10 (1976) 351

(WI75) T. Widmann, "Die Berechnung der T-Matrix in Kernmaterie in der $\Lambda^{(00)}$-Näherung", Diplomarbeit, Universität München 1975

(WI78) J. Winter, Fortschr. d. Phys. 26 (1978) 29

(WW68) G. Wegmann und M.K. Weigel, Phys. Lett. 26B (1968) 245

(WW71) M.K. Weigel und G. Wegmann, Fortschr. d. Phys. 19 (1971) 451

(WWW83) F. Weber, M.K. Weigel und J. Winter, Nuovo Cimento 36 N. 9 (1983) 284

Danksagung

Herrn Prof. Dr. M. Weigel gilt mein herzlicher Dank für die freundliche Anleitung und sein förderndes Interesse bei der Anfertigung der vorliegenden Arbeit.

Lebenslauf

Am 31. Oktober 1955 wurde ich als erstes Kind des Krankenpflegers Fridolin Weber und seiner Ehefrau Hermine Weber, geborene Stocker, in Murnau am Staffelsee geboren. Von 1962 bis 1969 besuchte ich die Grund- und Hauptschule in Uffing. Im September 1969 wechselte ich auf die Staatliche Realschule Kaufbeuren über, von wo ich im September 1970 in die Staatliche Realschule Weilheim übertrat. Im Juli 1973 erhielt ich die mittlere Reife. Von September 1973 bis August 1975 besuchte ich die Staatliche Fachoberschule Weilheim, die ich mit der Fachhochschulreife abschloß. Im Wintersemester 1975/76 begann ich an der Staatlichen Fachhochschule München das Studium der physikalischen Technik mit der Fachrichtung technische Physik. Nach der Zwischenprüfung im Sommersemester 1976 begann ich im Wintersemester 1976/77 an der Ludwig-Maximilians-Universität München das Studium der Physik. Im Wintersemester 1978/79 legte ich die Diplom-Vorprüfung ab. Unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. M. Weigel begann ich 1981 am Lehrstuhl für theoretische Physik (Abteilung theoretische Kernphysik) von Prof. Dr. G. Süßmann mit der Anfertigung meiner Diplomarbeit über das Thema "Kernmaterieuntersuchung mit der Quasi-Hartree-Fock Methode". Im September 1982 legte ich die Diplom-Hauptprüfung in Physik ab. Anschließend begann ich, unter der Anleitung von Prof. Dr. M. Weigel, mit meiner Dissertation am Lehrstuhl von Prof. Dr. G. Süßmann, an dem ich seit Januar 1983 als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig bin.